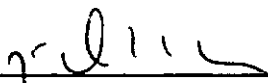


IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM O USO DE MICROCOMPUTADORES

José Antonio Fontes Santiago

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

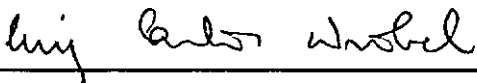
Aprovada por:



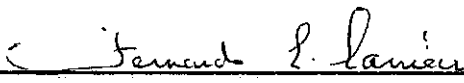
Prof. JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES
(Presidente)



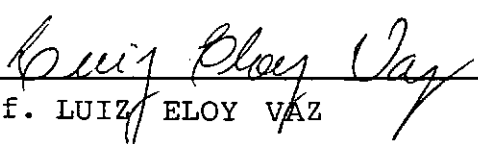
Prof. WEBE JOÃO MANSUR



Prof. LUIZ CARLOS WROBEL



Prof. FERNANDO LUÍS LOBO BARBOZA CARNEIRO



Prof. LUIZ ELOY VAZ

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO de 1987

SANTIAGO, JOSÉ ANTONIO FONTES

Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com o uso de Microcomputadores (Rio de Janeiro), 1987.

x, 171 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1987)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

I. Elementos de Contorno. I. COPPE/UFRJ
II. Título (série)

Aos meus pais

Sebastião e Dalila

Aos meus irmãos

Sebastião, Ana Maria e Mariângela

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Claudio de Faria Telles pelo incentivo e orientação dos trabalhos. A ele e aos professores Webe João Mansur e Luiz Carlos Wrobel pela participação do sistema PROCAT (Proteção Catódica para Tubulações e Estruturas OFF-SHORE) desenvolvido para o CENPES-PETROBRÁS.

Ao Roberto Dalledone Machado e Cláudio Luiz Curotto, professores de Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa, pelos ensinamentos e incentivos para que eu ingressasse no curso de Pós-Graduação.

Ao professor José Luís Braga, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, pelos ensinamentos e incentivos na área de computação.

A Quinzinho e Dê pelo apoio dado em Viçosa, durante o Curso de Graduação.

A Eduardo Fontes Araújo, José Antonio Marques Carrer e a todos outros, que de uma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Gilberto Luziê e José Mauro, pela confecção dos desenhos.

À Jaciára Roberta Barbosa pelo trabalho de datilografia.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM O USO DE MICROCOMPUTADORES

José Antonio Fontes Santiago

Dezembro de 1987

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um programa visando à análise linear de estruturas no estado plano de tensão ou deformação, utilizando o Método dos Elementos de Contorno, para solução fundamental de Kelvin.

Foram desenvolvidos quatro tipos de elementos isoparamétricos lineares para discretização do contorno, sendo um contínuo, um descontínuo e dois de transição.

Como recursos disponíveis para a análise foram introduzidos subregiões, multisuperfícies, simetria, peso próprio, força centrífuga e carga térmica, podendo combiná-los de qualquer forma possível.

O programa foi elaborado na linguagem FORTRAN, em microcomputadores de 16 bits compatíveis com IBM-PC ou IBM-PC XT, sendo utilizado entrada de dados interativa entre micro-usuário, contendo geração automática de dados, bem como a verificação da consistência dos dados.

Os resultados dos exemplos analisados foram comparados com soluções analíticas no final do trabalho.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

ON THE IMPLEMENTATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR
TWO-DIMENSIONAL ELASTOSTATICS USING MICROCOMPUTERS

José Antonio Fontes Santiago

December, 1987

Chairman : José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work is concerned with the development of a computer program for linear elastic analysis of 2-D plane stress/strain problems using Boundary Element Method. The fundamental solution due to Kelvin is employed.

Four different types of linear isoparametric elements have been implemented for the boundary discretization. These are; fully continuous, fully discontinuous and two alternative continuity transition elements.

The program allows for subregions, multisurfaces, symmetry, self-weight, centrifugal load and thermal load in any possible combination.

The program has been written in FORTRAN language for 16 bits IBM-PC or IBM-PC XT compatible microcomputers. Input data reading is performed in a user-friendly manner with the aid of a pre-processor which includes data generation facilities.

The results of some illustrative examples are compared with the corresponding analytical solutions at the end of the work.

ÍNDICE

	página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CON- TORNO PARA ELASTICIDADE	6
II.1 - Introdução	6
II.2 - Estado Plano de Tensão e Deforma- ção	6
II.2.1 - Estado plano de tensão	6
II.2.2 - Estado plano de deformação	7
II.2.3 - Equações gerais da elasticidade	8
II.2.4 - Tensões térmicas	14
II.3 - Método dos Elementos de Contor- no (MEC)	17
II.3.1 - Obtenção da Identidade de Somi- gliana	17
II.3.1.1 - Problema elástico	17
II.3.1.2 - Problema termoelástico	23
II.3.2 - Soluções fundamentais	25
II.3.3 - Equação integral no contorno ..	29
II.3.4 - Regiões infinitas	32

II.3.5 - Tensões nos pontos internos ...	35
II.3.6 - Tensões no contorno	37
II.3.7 - Forças de volume generalizada .	39
II.3.7.1 - Forças de volume	42
II.3.7.2 - Carga térmica	45
CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	48
III.1 - Introdução	48
III.2 - Funções de Interpolação	50
III.3 - Equações do MEC na Forma Matricial	53
III.4 - Matriz dos Coeficientes de Influên cia do Elemento	59
III.5 - Movimentos de Corpo Rígido	63
III.5.1 - Regiões finitas	63
III.5.2 - Regiões infinitas	64
III.6 - Simetria	66
III.7 - Subregiões	68
CAPÍTULO IV - RECURSOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS	74
IV.1 - Considerações Gerais	74
IV.2 - Módulos Executáveis	75
IV.2.1 - Leitura e verificação de consis tência dos dados	75

IV.2.2	- Processamento	77
IV.2.3	- Impressão do relatório	80
CAPÍTULO V	- APLICAÇÕES NUMÉRICAS	81
V.1	- Introdução	81
V.2	- Cavidade Cilíndrica	82
V.3	- Viga Longa Uniformemente Carregada	87
V.4	- Chapa Tracionada com Orifício Circular	92
V.5	- Chapa Submetida à Tração e ao Peso Próprio	97
V.6	- Disco Giratório	104
V.7	- Chapa Quadrada Aquecida à Temperatura Constante	117
CAPÍTULO VI	- CONCLUSÕES	121
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	124
APÊNDICE A	- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO	128
APÊNDICE B	- INTEGRAÇÃO ANALÍTICA PARA O ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO, QUANDO PONTO-FONTE PERTENCE AO ELEMENTO A SER INTEGRADO	130
APÊNDICE C	- TENSÕES NO CONTORNO PARA ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO	150

APÊNDICE D - TRANSFORMAÇÃO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO PARA INTEGRAL DE CONTORNO DAS FORÇAS DE VOLUME GE NERALIZADAS, UTILIZANDO O TENSOR DE GALER- KIN	156
APÊNDICE E - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS	167
APÊNDICE F - VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE REGULARIDADE PA- RA CARGA TÉRMICA	169

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno tem apresentado, no decorrer dos anos, excelentes resultados comprovados por numerosos trabalhos; por conseguinte, vem se tornando uma técnica bastante difundida em todo o mundo e muito eficiente, principalmente nos casos de domínios infinitos e quando existem regiões com concentrações de tensões.

Pelo fato de as aproximações serem feitas apenas no contorno, a dimensão do problema se reduz em uma unidade, acarretando uma diminuição considerável no fornecimento dos dados de entrada, bem como no esforço computacional, visto que o sistema de equações gerado, apesar de ser cheio e não simétrico, tem geralmente dimensões menores do que o obtido nos métodos que discretizam o domínio.

Desde 1950, MIKHLIN [1] e MUSKHELISHVILI [2] já utilizavam equações integrais singulares, para dar um tratamento a problemas de Elasticidade Plana. RIZZO [3], em 1967, trabalhou com a solução singular (solução fundamental) da equação diferencial que governa o problema, a qual corresponde à força concentrada. Em seu trabalho, o contorno foi representado por elementos retilíneos, sendo os deslocamentos e forças de superfície constantes e as integrações efetuadas numericamente. RICARDELLA [4] foi o primeiro a utilizar elemento retilíneo, no qual os deslocamentos e forças de superfície foram interpolados linearmente, para elasticidade plana. Todas integrais foram realizadas analiti

camente, inclusive os coeficientes das submatrizes \underline{C} que aparecem somando às submatrizes \hat{H} da diagonal. Em 1975, LACHAT [5] apresentou uma formulação para elasticidade bi e tridimensional, utilizando elementos curvos de segunda ordem, nos quais deslocamentos e forças de superfície podiam ter variação linear, quadrática ou cúbica.

No Brasil, o primeiro trabalho a ser publicado foi para problemas de campo no domínio bidimensional, apresentado, em 1978, por HALBRITTER, TELLES e MANSUR [6]. Neste mesmo ano, foi introduzida a formulação para elasticidade linear plana por MANSUR, HALBRITTER e TELLES [7] e TELLES, MANSUR e HALBRITTER [8], sendo utilizado elemento reto com função de interpolação linear para as incógnitas, o conceito de nó duplo, evitando assim a descontinuidade das forças de superfície e quatro pontos de Gauss para as integrações numéricas.

Vários trabalhos foram desenvolvidos no decorrer dos anos, contribuindo para o aperfeiçoamento do método, sendo que em elasticidade bidimensional foi apresentado por MOREIRA [9], em 1983, uma formulação, na qual é utilizado elemento de contorno isoparamétrico linear, subregiões em fila, peso próprio e equações adicionais obtidas das propriedades dos invariantes elásticos, para tratar o problema da descontinuidade das forças de superfície.

O Método dos Elementos de Contorno pode ser formulado de duas maneiras diferentes; isto é, método indireto e direto. No primeiro, as equações integrais são expressas em termos de densidades de fontes, as quais não têm significado físico. Uma vez ob

tidos os valores destas densidades, determinam-se os deslocamentos e forças de superfície. A formulação direta fornece diretamente, como incógnitas, os deslocamentos e as forças de superfície.

Neste trabalho, foi desenvolvido o Método dos Elementos de Contorno para elasticidade linear bidimensional, considerando meio elástico infinito (Solução fundamental de Kelvin), utilizando a formulação direta e o conceito de região no sentido de finido por KELLOG [10], ou seja, região onde o contorno é representado por superfícies regulares, podendo apresentar cantos ou angulosidades e não necessariamente suave em todo ele.

Para descrição do corpo da tese, esta foi dividida em seis Capítulos, sendo o primeiro a introdução e os demais comentados de uma forma sucinta a seguir.

No Capítulo II apresentam-se, primeiramente, alguns conceitos básicos da teoria sobre Elasticidade Bidimensional, para problemas no regime elástico linear, orientados ao Método dos Elementos de Contorno. A seguir, demonstra-se a Identidade de Somigliana para corpo elástico e termoelástico, utilizando Método dos Resíduos Ponderados, onde a função de ponderação é a própria solução fundamental, comentada em um item separado. Para a obtenção da Equação Integral do Contorno utiliza-se a dedução formal, subtraindo de um setor circular o contorno. Comenta-se sobre as condições de regularidade para problemas de cavidades e mostraram-se as expressões necessárias ao cálculo das tensões nos pontos internos e no contorno, bem como às forças de volume generalizadas (Peso próprio, força centrífuga e carga térmica),

sendo utilizado o tensor de Galerkin para fazer a transformação da integral de domínio para a integral do contorno.

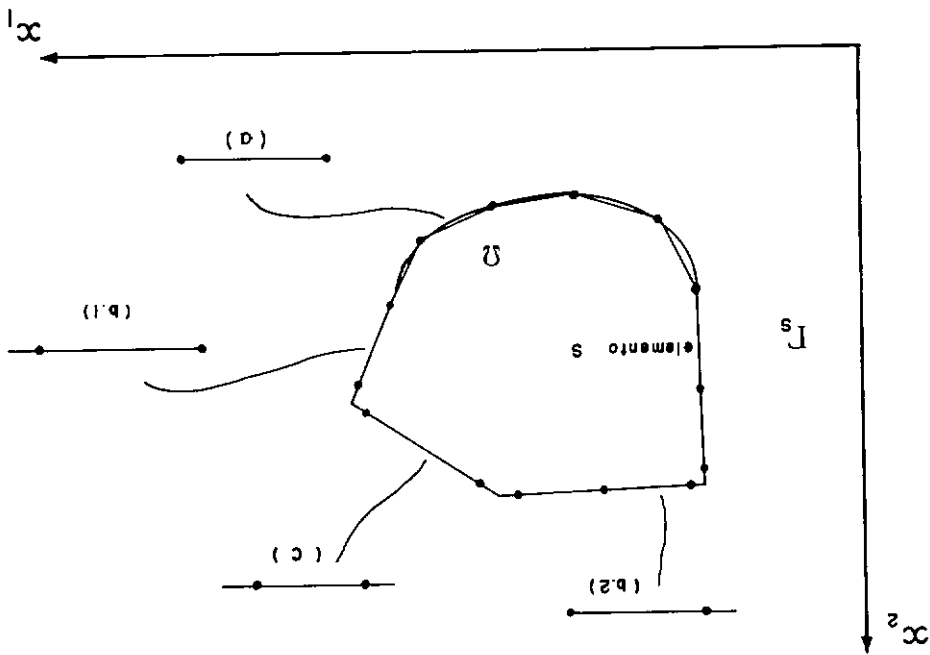
No Capítulo III, discorre-se sobre a implementação numérica, comentando sobre os elementos disponíveis (descontínuos, contínuos e transições) para a análise, as funções de interpolação utilizadas para as coordenadas cartesianas, deslocamentos e forças de superfície. O sistema de equações para o Método dos Elementos de Contorno é então obtido, utilizando o Método de Colocação, que é um Método dos Resíduos Ponderados. Comenta-se, também, sobre a determinação das matrizes dos coeficientes de influência dos elementos, bem como a obtenção das submatrizes da diagonal principal, através de movimentos de corpo rígido para corpos finitos e infinitos. Finalmente, descrevem-se os recursos disponíveis que podem ser utilizados para auxiliar a análise, sendo a simetria em relação a um dos eixos X ou Y ou em relação a ambos e o artifício da subregião, podendo ter quantas regiões se fizerem necessárias e que a memória principal do programa permitir.

No Capítulo IV, comenta-se sobre os recursos computacionais utilizados no desenvolvimento do programa, descrevendo a maneira como foram organizadas as subrotinas e a estrutura interna de dados, bem como o pré-processador elaborado. Algumas técnicas, utilizadas para evitar o mau condicionamento das matrizes foram citadas.

No Capítulo V, apresentam-se os resultados dos exemplos e uma comparação com soluções analíticas, para comprovar o

programa desenvolvido, incluindo a utilização de subregiões, simetria e as forças de volume generalizadas.

Finalmente, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais e as sugestões para novos estudos e continuidade do trabalho apresentado.



CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE

II.1 - Introdução

Neste Capítulo, apresentam-se alguns conceitos básicos da teoria de elasticidade que serão utilizados pelos Capítulos subsequentes. Estas notas serão orientadas visando à aplicação do método dos elementos de contorno para problemas bi-dimensionais no regime elástico linear. Para um estudo mais detalhado, recomendam-se as referências [11, 12, 13, 14].

Admitem-se as hipóteses de pequenos deslocamentos, pequenas deformações e material obedecendo a lei de Hooke, isto é, linearidade das relações deformações específicas-deslocamentos e tensões-deformações específicas, bem como a não influência da mudança de configuração da estrutura na formulação das equações de equilíbrio.

II.2 - Estado Plano de Tensão e Deformação

II.2.1 - Estado plano de tensão (EPT)

Seja uma chapa delgada solicitada por forças paralelas ao plano xy (Figura II.1) e distribuídas uniformemente ao longo da espessura. Desde que as faces perpendiculares a z estejam descarregadas, as tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são nulas e pode-se admitir, em princípio, que sejam nulas também no interior da chapa.

Sendo pequena a espessura, admite-se, aproximadamente, que σ_x , σ_y e τ_{xy} sejam independentes de z .

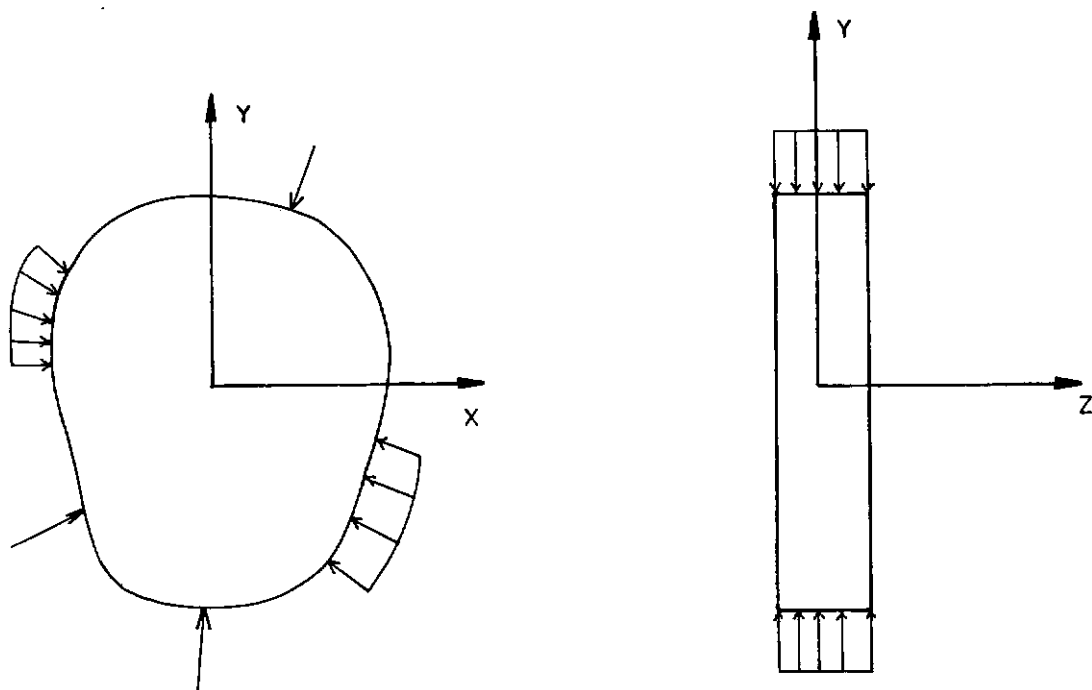


Fig.II.1 - Chapa delgada submetida a carregamentos no seu plano

As deformações ϵ_{xz} e ϵ_{yz} são nulas e a deformação específica ϵ_z pode ser calculada em função de ϵ_x e ϵ_y , da seguinte forma:

$$\epsilon_z = \frac{\nu(\epsilon_x + \epsilon_y)}{\nu - 1}, \quad (\text{II.1})$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

II.2.2 - Estado plano de deformação (EPD)

Seja um corpo longo prismático, localizado entre dois planos indeslocáveis e sem atrito, solicitado por forças agindo

em planos perpendiculares ao eixo longitudinal z (Figura II.2) e que estas, bem como as condições de contorno, não variam ao longo do comprimento.

O deslocamento axial w é nulo nas extremidades e, por simetria, na seção do meio, podendo admitir que o mesmo ocorra em todas as seções transversais. As componentes u e v são funções de x e y , portanto ϵ_z , ϵ_{xz} e ϵ_{yz} são nulas e as demais independentes de z .

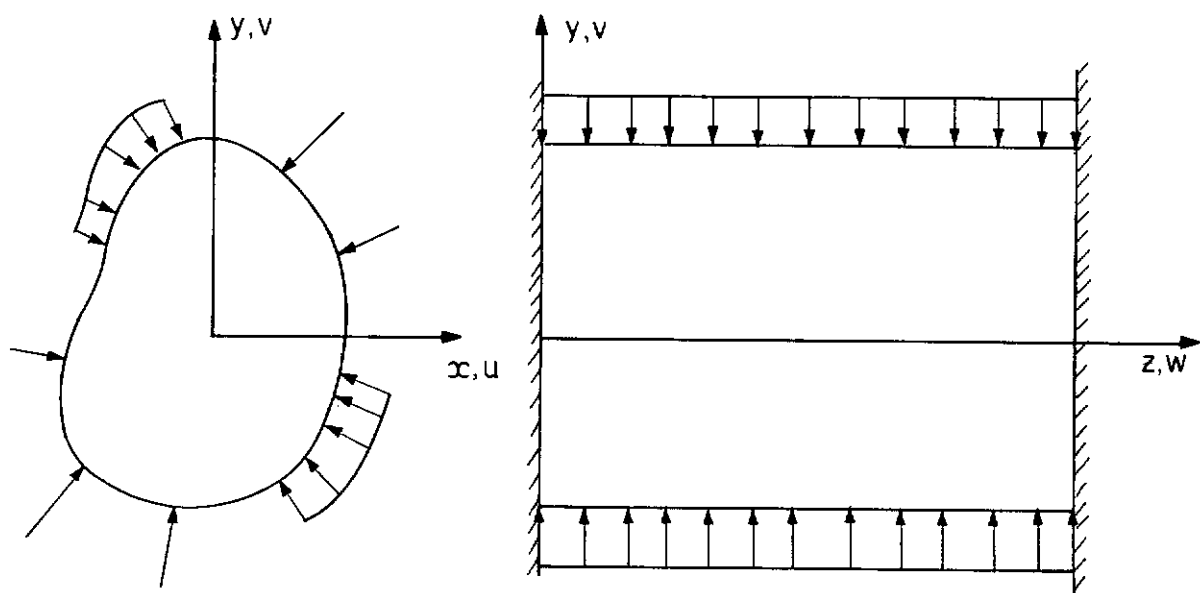


Fig.II.2 - Sólido prismático submetido a forças paralelas ao plano XY

As tensões τ_{xz} e τ_{yz} são nulas e a tensão longitudinal σ_z pode ser encontrado em função de σ_x e σ_y , da seguinte relação:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{II.2})$$

II.2.3 - Equações gerais da elasticidade

A fim de facilitar a exposição das equações, necessárias para definir o problema de elasticidade bidimensional, uti-

liza-se a notação cartesiana indicial, ou seja, os índices 1 e 2 são usados para substituir x ou y , respectivamente, bem como o símbolo de somatório é desnecessário sempre que aparecer 2 índices iguais no mesmo termo.

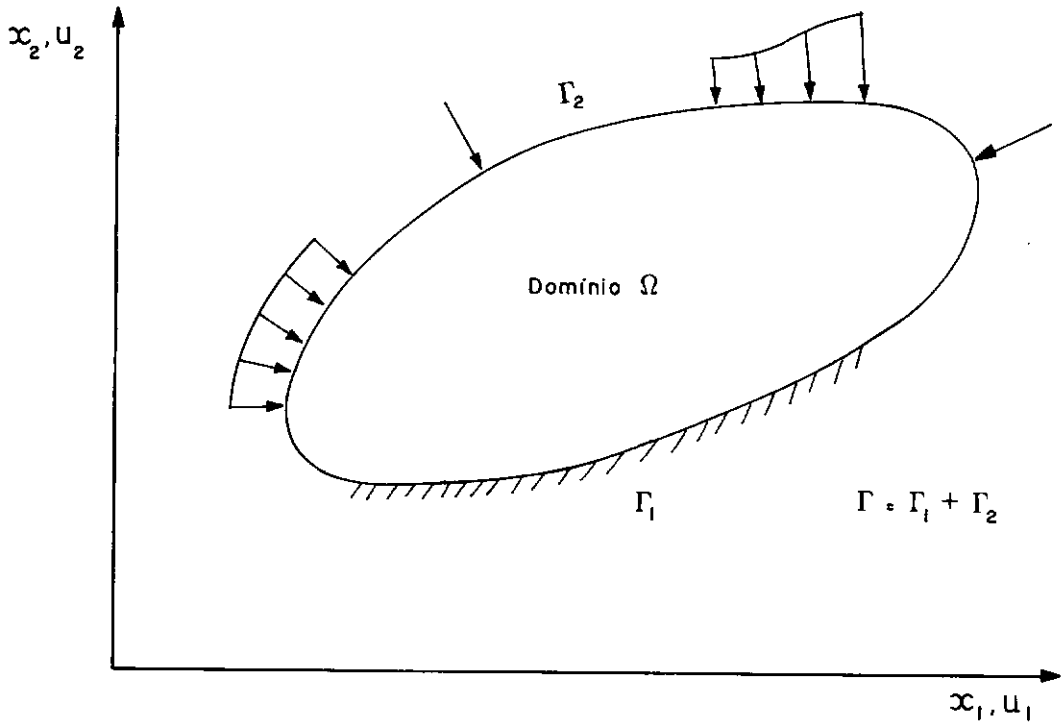


Fig.II.3 - Corpo solicitado por forças agindo paralelamente ao plano $x_1 x_2$

O estado tensional em um ponto no interior do domínio Ω é representado, em relação ao referencial $x_1 x_2$ pela matriz de tensões:

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \text{ onde } \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

Considerando um pequeno paralelepípedo retangular de arestas dx_1 e dx_2 , as componentes de tensão, atuando nas faces deste pequeno elemento e seus sentidos positivos, estão indicadas na Figura II.4.

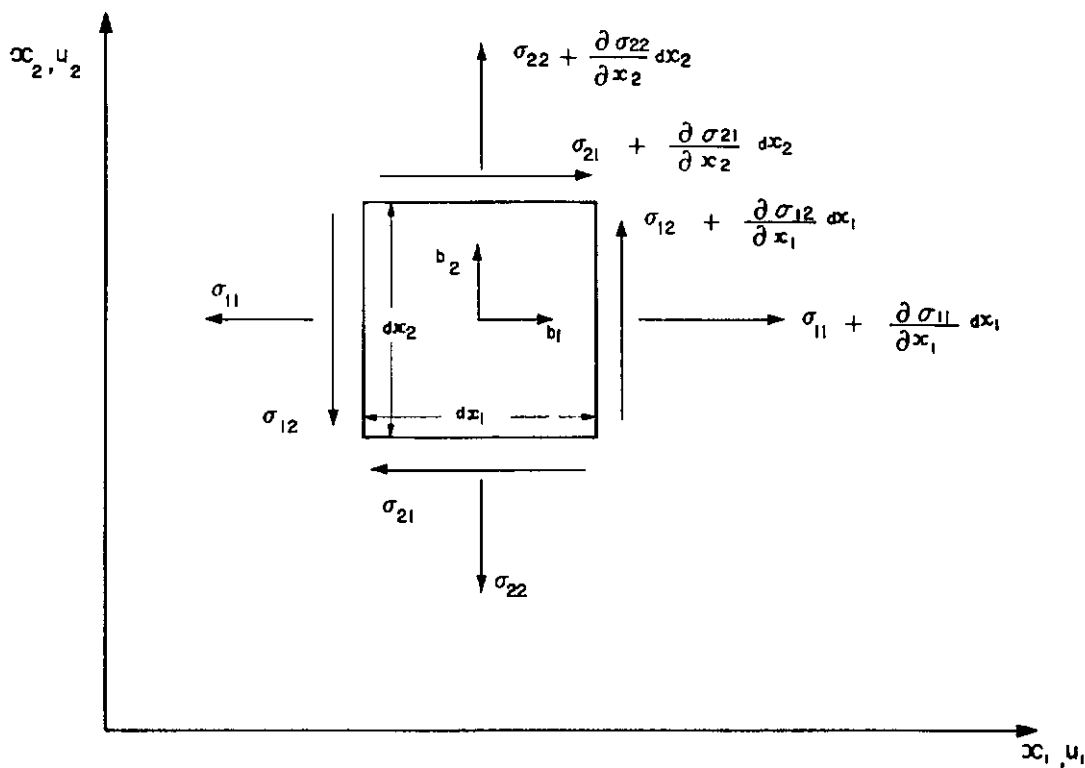


Fig.II.4 - Tensões e forças de volume

A equação de equilíbrio estático no interior Ω do corpo é:

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0, \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2; \quad (\text{II.3})$$

onde σ_{jk} representa as componentes do tensor de tensão e o b_k as componentes das forças de volume. As derivadas espaciais são indicadas por vírgulas, ou seja, $\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} = \sigma_{jk,j}$.

Esta equação deve ser satisfeita em todos os pontos no interior do domínio. As tensões variam neste domínio e, quando chegam ao contorno, elas devem ser tais que estejam em equilíbrio com as forças de superfície.

As tensões num plano qualquer são dadas pela fórmula de Cauchy:

$$\rho_j = \sigma_{jk} n_k \quad (\text{II.4})$$

onde ρ_j é a componente do vetor tensão num plano qualquer e n_k representam os cossenos diretores da normal.

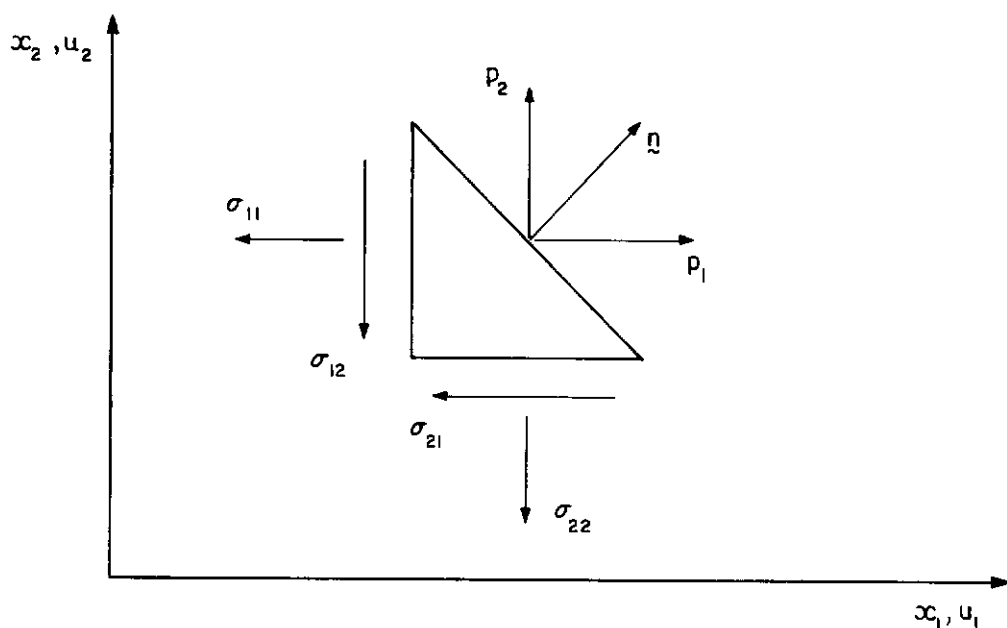


Fig.II.5 - Forças de superfície

Aplicando esta fórmula (II.4) num plano coincidente com a superfície, obtém-se a condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo:

$$p_j = \sigma_{jk} n_k \quad , \quad (\text{II.5})$$

onde p_j é a componente do vetor de forças de superfície e a normal aponta para fora do corpo.

O estado de deformação de um ponto no interior do corpo, em relação ao referencial x_1x_2 , é definido pelo tensor de deformação específica.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \epsilon_{12} = \epsilon_{21}$$

Dados os deslocamentos u_i , funções, contínuas e deriváveis, determinam-se as componentes de deformação, por derivação:

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2} (u_{j,k} + u_{k,j}) \quad (\text{II.6})$$

Para garantir um campo de deslocamentos contínuo e unívoco, as deformações devem obedecer a equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{II.7})$$

Para um material homogêneo, isótropo e linearmente elástico, considerando o estado inicial neutro, a relação tensão-deformação específica é escrita na forma:

$$\sigma_{jk} = C_{jki\ell} \epsilon_{i\ell}, \quad (\text{II.8})$$

onde $C_{jki\ell}$ é o tensor isótropo de 4ª ordem de constantes elásticas, dado por:

$$C_{jki\ell} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \delta_{i\ell} + G(\delta_{ji} \delta_{k\ell} + \delta_{j\ell} \delta_{ki}), \quad (\text{II.9})$$

sendo G o Módulo de elasticidade transversal, ν o coeficiente de Poisson e δ_{jk} o delta de Kroneker, definido como:

$$\delta_{jk} = 1 \quad , \quad \text{se } j = k$$

$$\delta_{jk} = 0 \quad , \quad \text{se } j \neq k$$

O Módulo de elasticidade longitudinal pode ser escrito em termos de G e ν como:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (\text{II.10})$$

Aplicando a Equação (II.9) em (II.8), tem-se a lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{jk} = 2G\epsilon_{jk} + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{\ell\ell} \delta_{jk} \quad , \quad (\text{II.11})$$

As Equações (II.3), (II.6) e (II.11) definem o problema de elasticidade linear para estado plano de deformação. Para o caso de estado plano de tensão deve-se substituir ν por $\nu/(1 + \nu)$.

Substituindo a Equação (II.6) na Equação (II.11), obtém-se a expressão das tensões em termos das derivadas dos deslocamentos, que, substituída nas equações de equilíbrio (II.3) e (II.5), leva à equação de equilíbrio de Navier:

$$G u_{k,\ell\ell} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{\ell,\ell k} + b_k = 0 \quad \text{em } \Omega \quad , \quad (\text{II.12})$$

cujas forças de superfície no contorno devem satisfazer:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{\ell,\ell} n_j + G(u_{j,k} + u_{k,j}) n_k = p_j \text{ em } \Gamma \quad (\text{II.13})$$

II.2.4 - Tensões térmicas

Seja analisar agora um corpo no estado plano de deformação (vide item (II.2.2)), quando a temperatura, embora variando ao longo da seção transversal, não varia ao longo das linhas paralelas ao eixo z , ou seja, T é independente de z ; assim, a expressão (II.2) torna-se:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) - 2G\alpha (1 + \nu) T \quad , \quad (\text{II.14})$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica linear e T a diferença de temperatura.

A deformação total para problemas envolvendo cargas térmicas é representado por:

$$\epsilon_{jk} = \epsilon_{jk}^e + \epsilon_{jk}^T \quad (\text{II.15})$$

onde ϵ_{jk}^e é a deformação elástica e ϵ_{jk}^T a deformação térmica, dada por $\epsilon_{jk}^T = \alpha T \delta_{jk}$.

As deformações térmicas são consideradas como deformações iniciais. A aplicação da lei de Hooke para a parte elástica do tensor de deformação resulta na seguinte expressão:

$$\sigma_{jk} = 2G (\epsilon_{jk} - \epsilon_{jk}^T) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{\ell\ell} - \epsilon_{\ell\ell}^T) \delta_{jk} \quad (\text{II.16})$$

Escrevendo a Expressão (II.16), em termos da tensão inicial, tem-se:

$$\sigma_{jk} = 2G \varepsilon_{jk} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\ell\ell} \delta_{jk} - \sigma_{jk}^T \quad (\text{II.17})$$

onde σ_{jk}^T é a tensão inicial referente as deformações térmicas da da por:

$$\sigma_{jk}^T = 2G \varepsilon_{jk}^T + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\ell\ell}^T \delta_{jk} \quad (\text{II.18})$$

Para estado plano de deformação, $\varepsilon_{jk}^T = \alpha T \delta_{jk}$, $\varepsilon_{\ell\ell}^T = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T + \varepsilon_{33}^T = 3\alpha T$. Substituindo estas expressões na Equação (II.18), obtem-se, para um material isótropo:

$$\sigma_{jk}^T = 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T \delta_{jk} \quad (\text{II.19})$$

As Equações (II.6) e (II.19), introduzidas na Equação (II.17), fornecem as tensões em termos das derivadas dos deslocamentos:

$$\sigma_{jk} = G(u_{j,k} + u_{k,j}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{\ell,\ell} \delta_{jk} - 2G \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha T \delta_{jk} \quad (\text{II.20})$$

Substituindo esta Equação (II.20) nas Equações (II.3) e (II.5), obtem-se a equação de equilíbrio de Navier, em uma forma expandida da Equação (II.12):

$$G u_{k,\ell\ell} + \frac{G}{1-2\nu} u_{\ell,\ell k} + b_k - 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) T_{,k} = 0 \quad (\text{II.21})$$

cuja s forças de superfície no contorno devem satisfazer:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{\ell,\ell} n_j + G(u_{j,k} + u_{k,j}) n_k = p_j + 2G \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right] \alpha T n_j \quad (\text{II.22})$$

Nota-se que o problema de elasticidade, envolvendo carga térmica, pode ser tratado como no ítem anterior, superpondo-se às forças de volume o valor $-2G\alpha (1+\nu)/(1-2\nu) T_{,k}$ e às forças de superfície $2G (1+\nu)/(1-2\nu) \alpha T n_j$.

As equações anteriores são válidas para estado plano de deformação. Para um corpo no estado plano de tensão, quando a temperatura não variar ao longo da espessura, estas expressões podem ser usadas trocando ν por $\bar{\nu}$, α por $\bar{\alpha}$ e tomando ϵ_{kk}^T como $2\alpha T (1-2\nu)/(1-\nu)$, enquanto que o G permanece inalterado, sendo:

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{\nu}{1+\nu} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{1+\bar{\nu}} = \alpha \left[\frac{1+\nu}{1+2\nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

No caso de um fluxo estacionário de calor paralelo ao plano xy , como em uma chapa delgada ou em um cilindro longo sem variação de temperatura na direção axial z , a temperatura T deve satisfazer a equação:

$$T_{,\ell\ell} = 0 \quad (\text{II.24})$$

II.3 - Método dos Elementos de Contorno (MEC)

II.3.1 - Obtenção da identidade de Somigliana

II.3.1.1 - Problema elástico

Considerando o corpo definido na Figura (II.3) e governado pela equação de equilíbrio (II.3), sujeito às seguintes condições de contorno;

a) naturais ou forças de superfície prescritas

$$p_k = \bar{p}_k \quad \text{em } \Gamma_2, \quad (\text{II.25})$$

b) essenciais ou deslocamentos prescritos

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (\text{II.26})$$

sendo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ o contorno total, o Método dos Resíduos Ponderados fornece a seguinte relação [15]:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma, \quad (\text{II.27})$$

onde p_k^* pode ser escrito em função de u_k^* , através da Equação (II.13), sendo esta a função de ponderação e deve ter a primeira derivada contínua.

Integrando por partes o primeiro termo da Equação (II.27), já substituindo a Expressão (II.5) e $u_{k,j}^*$ por ϵ_{jk}^* , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \\ = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (II.28) \end{aligned}$$

O princípio da reciprocidade, devido à simetria dos tensores envolvidos, pode ser escrito na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk}^e d\Omega \quad (II.29)$$

Introduzindo a Equação (II.15) na Equação (II.29), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk}^T d\Omega \quad (II.30)$$

Levando em consideração o princípio da reciprocidade e substituindo a relação deformação-deslocamento (Equação (II.6)) na Equação (II.28), esta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* (u_{j,k} + u_{k,j}) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk}^T d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (II.31)
\end{aligned}$$

Considerando nula a segunda integral do lado esquerdo da Equação (II.31) (problema sem carga térmica), a qual será analisada detalhadamente no próximo item (II.3.1.2), a Equação (II.31) torna-se:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* (u_{j,k} + u_{k,j}) d\Omega + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (II.32)
\end{aligned}$$

Integrando por partes novamente o primeiro termo da Equação (II.32) e lembrando que $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega - \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (II.33)
\end{aligned}$$

Após simplificações e considerando $u_k = \overline{u_k}$ em Γ_1 , $p_k = \overline{p_k}$ em Γ_2 e $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (\text{II.34})$$

A "função" Delta de Dirac $\Delta(\xi, x)$ tem as seguintes propriedades:

$$\Delta(\xi, x) = 0 \quad , \quad \text{se } \xi \neq x \quad ,$$

$$\int_{\Omega} g(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \quad , \quad \xi \in \Omega \quad ,$$

onde ξ é o ponto fonte e x o ponto campo, os quais serão mais bem explicados adiante.

Somando e subtraindo a integral $\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) p_k u_k d\Omega$, na qual $p_k = 1$, na Equação (II.34), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\sigma_{jk,j}^* + \Delta(\xi, x) p_k \right] u_k d\Omega - \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) p_k u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Considerando que as forças de volume são funções conhecidas, a terceira integral do lado esquerdo da Equação (II.35) não introduz nenhuma incógnita, o que não acontece com a primeira, pois esta apresenta deslocamentos desconhecidos no domínio Ω . As integrais do lado direito só apresentam incógnitas no contorno e, como o objetivo do MEC é eliminar as incógnitas no domínio, a primeira integral deve ser nula e portanto,

$$\sigma_{jk,j}^* + \Delta(\xi, x) P_k = 0 \quad , \quad (II.36)$$

visto que u_k é o campo de deslocamento que pode ser diferente de zero.

A Equação (II.36) representa equação de equilíbrio, na qual as componentes das forças de volume correspondem a forças concentradas unitárias em cada uma das duas direções ortogonais. Esta equação pode ser escrita na forma da equação de equilíbrio de Navier (Equação (II.12)), como:

$$G u_{k,\ell\ell}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{\ell,\ell k}^* + \Delta(\xi, x) P_k = 0 \quad (II.37)$$

A solução desta Equação (II.37) (ver LOVE [16]) é chamada solução fundamental, sendo comentada no próximo item.

Tendo em vista a segunda propriedade da "função" Delta de Dirac apresentada, a segunda integral da Equação (II.35) é igual a $u_k(\xi)$, levando a escreve-la da seguinte forma:

$$u_k(\xi) p_k = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega, \quad (\text{II.38})$$

na qual $\xi \in \Omega$.

É importante salientar que a Equação (II.38) considera as duas cargas unitárias sendo aplicadas simultaneamente. Adotando que cada carga concentrada atua independente, os deslocamentos e forças de superfície podem ser escritos como:

$$u_k^* = u_{jk}^* (\xi, x) p_j \quad (\text{II.39})$$

$$p_k^* = p_{jk}^* (\xi, x) p_j$$

onde u_{jk}^* e p_{jk}^* representam o deslocamento e a força de superfície na direção k no ponto x , devido a uma carga unitária agindo na direção j no ponto ξ .

Para representar cada componente de deslocamento em separado, escreve-se a Equação (II.38) como:

$$u_j(\xi) = \int_{\Gamma} p_k(x) u_{jk}^* (\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k(x) p_{jk}^* (\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} b_k(x) u_{jk}^* (\xi, x) d\Omega(x), \quad \text{onde } \xi \in \Omega \quad (\text{II.40})$$

A Equação (II.40) pode também ser obtida pelo segundo teorema de Betti (reciprocidade) ou pela dedução formal [17],

sendo conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos e representa o deslocamento u_k em qualquer ponto ξ do domínio.

II.3.1.2 - Problema termoelástico

Seja analisar a segunda integral do lado esquerdo da Equação (II.31). Introduzindo a expressão da deformação térmica $\epsilon_{jk}^T = \alpha T \delta_{jk}$ e a Expressão (II.8) nesta integral, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk}^*(\xi, x) \epsilon_{jk}^T(x) d\Omega(x) &= \\ &= \alpha \int_{\Omega} C_{jki\ell} \epsilon_{i\ell}^*(\xi, x) \delta_{jk} T(x) d\Omega \end{aligned} \quad (II.41)$$

Substituindo a Expressão (II.9) na Equação (II.41), multiplicando por δ_{jk} e trocando $\delta_{i\ell} \epsilon_{i\ell}^*$ por $\delta_{jk} \epsilon_{jk}^*$, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk}^T d\Omega = 2G\alpha \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Omega} T \delta_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega \quad (II.42)$$

Colocando esta nova Expressão (II.42) na Equação (II.31), seguindo os mesmos passos do ítem (II.3.1.1), tendo em mente que $\delta_{jk} \epsilon_{jk}^* = u_{k,k}^*$, obtém-se a Equação (II.38) acrescida da integral referente à carga térmica:

$$\begin{aligned}
u_k p_k = & \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \\
& + 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \int_{\Omega} T u_{k,k}^* d\Omega
\end{aligned} \quad (II.43)$$

Integrando por partes a última integral de volume da Equação (II.43) e reagrupando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_k p_k = & \int_{\Gamma} \left[p_k + 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} T n_k \right] u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} \left[b_k - 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} T_{,k} \right] u_k^* d\Omega
\end{aligned} \quad (II.44)$$

Supondo que as cargas unitárias atuam independentes, a Equação (II.44) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} \hat{p}_k(x) u_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k(x) p_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Omega} \hat{b}_k(x) u_{jk}^*(\xi, x) d\Omega(x)
\end{aligned} \quad (II.45)$$

onde,

$$\hat{p}_k = p_k + 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} T n_k \quad (II.46)$$

$$\hat{b}_k = b_k - 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} T_{,k}$$

II.3.2 - Soluções fundamentais

Como visto anteriormente, a solução para a equação de equilíbrio de Navier (ver Equação (II.37)) é chamada de solução fundamental, a qual depende da região Ω^* e Γ^* (Figura II.6) e das condições de contorno.

Neste trabalho, considera-se Ω^* como um meio elástico infinito e, conseqüentemente, Γ^* está situado a uma distância in finita do corpo em questão. Neste caso, a solução fundamental é devido a KELVIN [16].

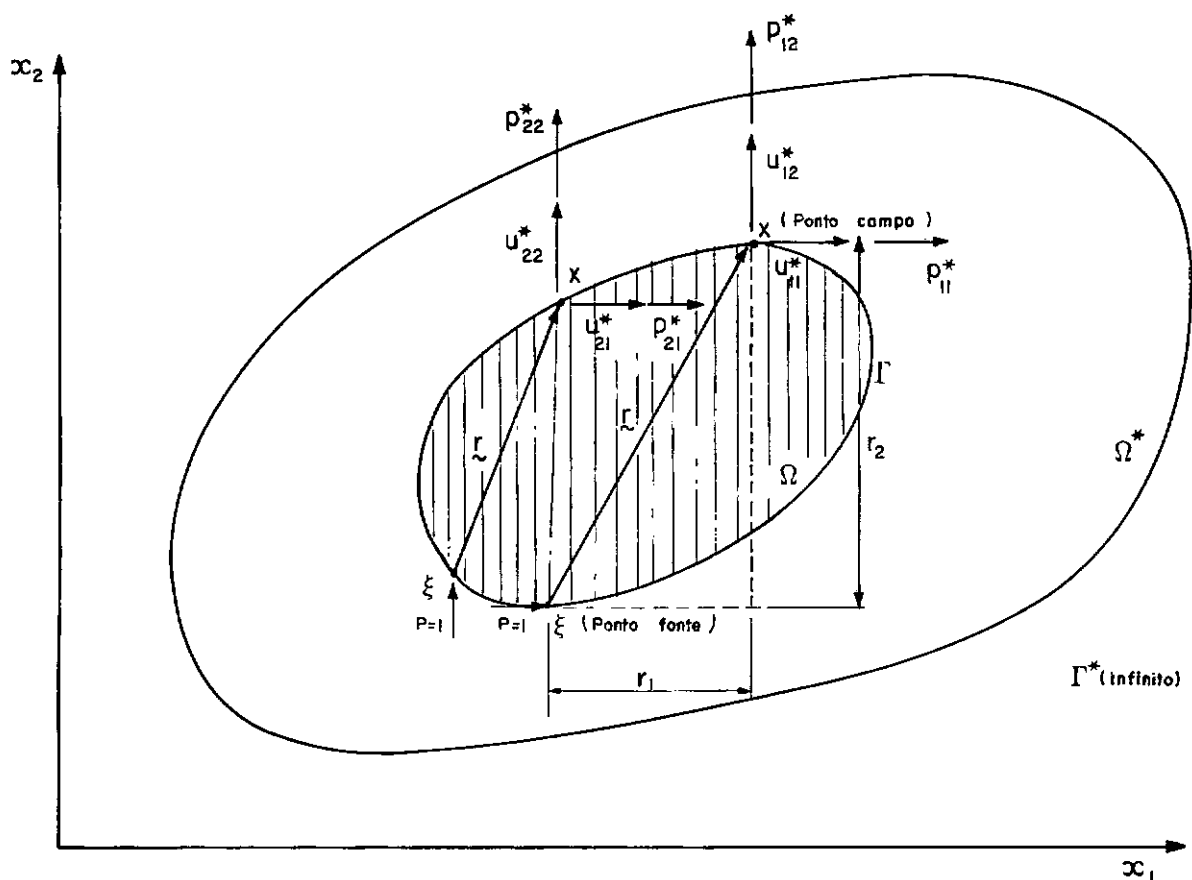


Fig.II.6 - Carga concentrada unitária aplicada na região infinita

Supondo que ξ é o ponto fonte e x o ponto campo, as expressões das soluções fundamentais são [17, 18, 19]:

a) Deslocamentos

$$u_{jk}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{jk} - r_{,j} r_{,k} \right]; j=1,2 \text{ e } k=1,2$$

$$\tilde{U}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

b) Forças de superfícies

Substituindo a expressão dos deslocamentos (II.47) na Equação (II.13), obtem-se:

$$p_{jk}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{jk} + 2 r_{,j} r_{,k} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,j} n_k - r_{,k} n_j) \right\} \quad (\text{II.48})$$

$$\tilde{P}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$$

c) Deformações específicas

Considerando $\epsilon_{jk\ell}^*$ (Figura II.7) como a deformação $\epsilon_{k\ell}^*$ em um ponto x , devido a uma carga unitária aplicada no ponto ξ na

direção j , a relação deformação-deslocamento (ver Equação II.6)) fornece:

$$\epsilon_{jkl}^* (\xi, x) = \frac{-1}{8\pi (1-\nu) Gr} \left[(1-2\nu) (r_{,k} \delta_{jl} + r_{,l} \delta_{jk}) - r_{,j} \delta_{kl} + 2 r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] \quad (\text{II.49})$$

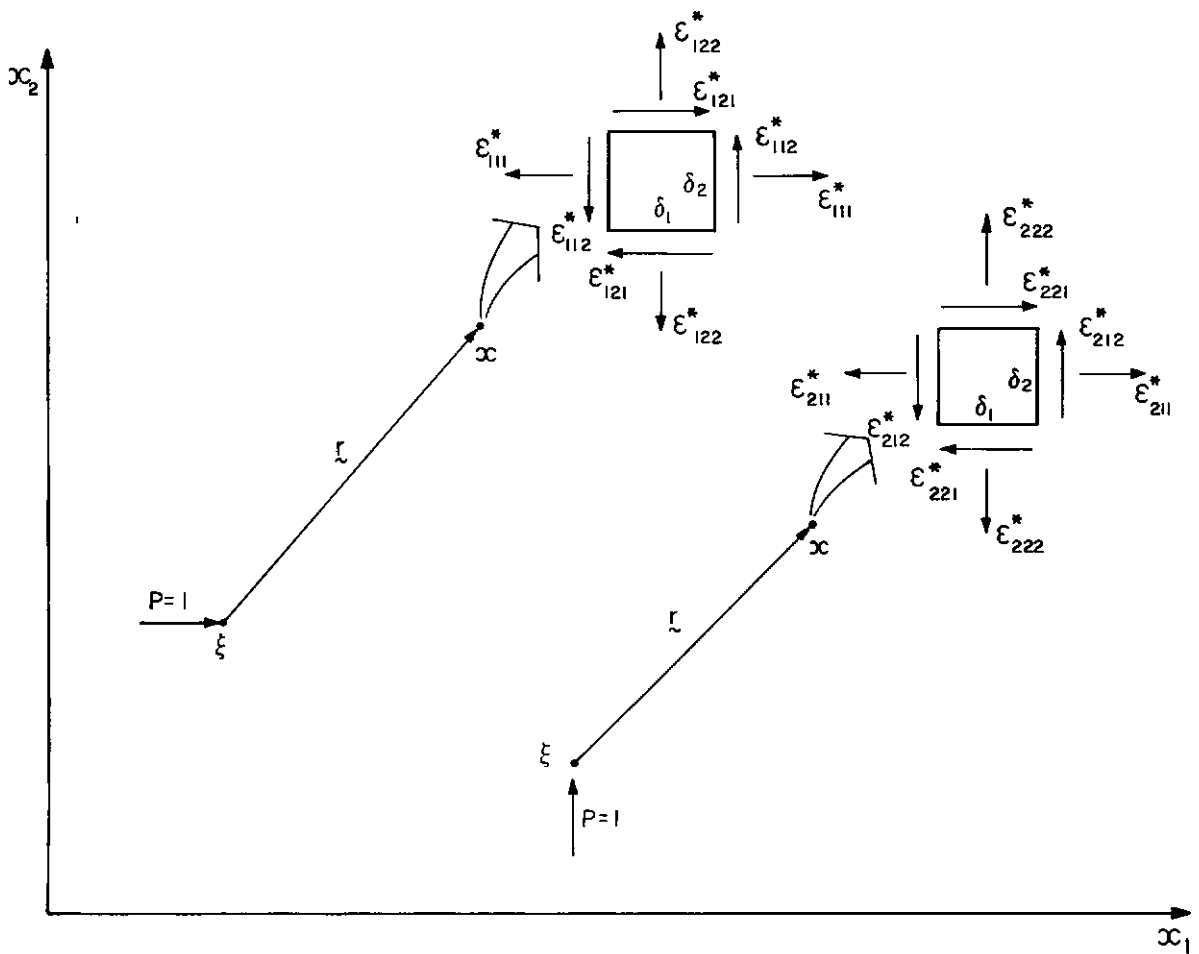


Fig.II.7 - Deformações específicas fundamentais

$$\tilde{\epsilon}^* = \begin{bmatrix} \epsilon_{111}^* & \epsilon_{112}^* & \epsilon_{211}^* & \epsilon_{212}^* \\ \epsilon_{121}^* & \epsilon_{122}^* & \epsilon_{221}^* & \epsilon_{222}^* \end{bmatrix}$$

d) Tensões

Supondo que σ_{jkl}^* (Figura (II.8)) é a tensão σ_{kl}^* em um ponto x , devido a uma carga unitária aplicado no ponto ξ na direção j , a equação constitutiva (Equação (II.11)) fornece:

$$\sigma_{jkl}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{jl} + r_{,l}\delta_{jk} - r_{,j}\delta_{kl}) + 2r_{,j}r_{,k}r_{,l} \right] \quad (\text{II.50})$$

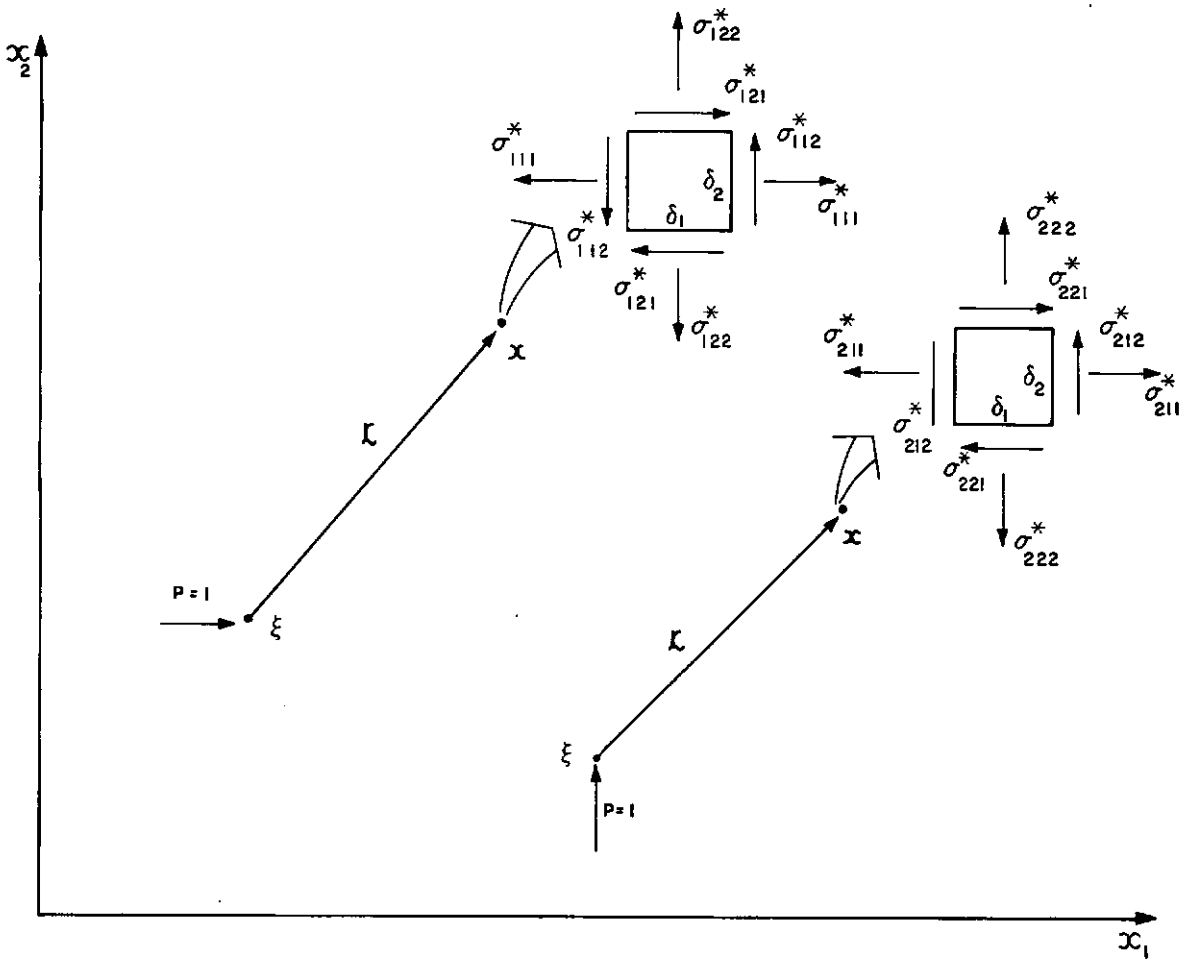


Fig.II.8 - Tensões fundamentais

$$\tilde{\tau}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{111}^* & \sigma_{112}^* & \sigma_{211}^* & \sigma_{212}^* \\ \sigma_{121}^* & \sigma_{122}^* & \sigma_{221}^* & \sigma_{222}^* \end{bmatrix}$$

Para todas expressões, $r = r(\xi, x)$ representa a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x e suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas do ponto x , ou seja,

$$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j(x)} = \frac{r_j}{r} \quad , \quad (II.51)$$

onde $r = (r_j r_j)^{1/2}$ e (II.52)

$$r_j = x_j(x) - x_j(\xi)$$

As expressões acima são válidas para o estado plano de deformação. No caso do estado plano de tensão, deve-se substituir ν por $\bar{\nu}$, apresentado na Equação (II.23).

II.3.3 - Equação integral no contorno

Para que a Equação (II.45) represente deslocamentos no contorno, transformando na equação integral inicial do MEC, relacionando apenas variáveis no contorno (força de volume são sempre prescritas), pode-se utilizar a seguinte alternativa [17, 18]. O domínio é subtraído de um setor de círculo mostrado na Figura (II.9), com o centro no ponto fonte ξ e raio ϵ .

A Equação (II.30) pode ser escrita para o corpo mostrado na Figura (II.9) como:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk} d\Omega - \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{jk}^* \epsilon_{jk}^T d\Omega \quad (II.53)$$

onde Ω_ϵ é o domínio removido do setor de círculo.

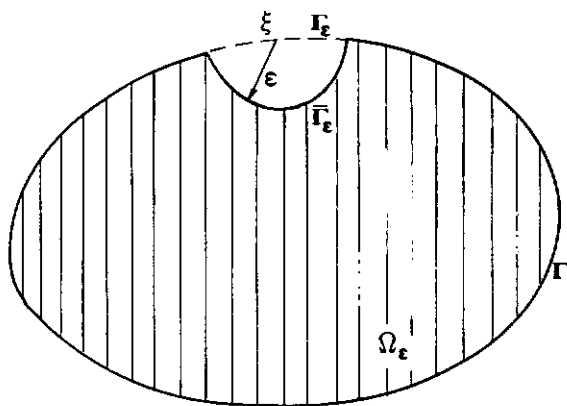


Fig.II.9 - Ponto singular ξ removido do contorno por um setor de círculo

O ponto fonte ξ não pertence ao domínio Ω_ϵ , portanto os tensores fundamentais não são singulares. Supondo que $\epsilon_{jk}(x)$ e $\sigma_{jk}(x)$ representam, respectivamente, deformações e tensões contínuas no domínio Ω_ϵ , integrando por partes a Equação (II.53), tendo em vista que $\Delta(\xi, x) = 0$ em todo domínio Ω_ϵ , já adotando que as cargas unitárias atuam independentes e introduzindo a Expressão (II.42), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) + \\
 &+ \int_{\Omega_\epsilon} u_{jk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) + \\
 &+ 2G\alpha \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \int_{\Omega_\epsilon} T(x) \delta_{jk} \epsilon_{jk}^*(\xi, x) d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{II.54}$$

Substituindo $\delta_{jk} \varepsilon_{jk}^*$ por $u_{k,k}^*$ na Equação (II.54), integrando por partes a última integral de volume e reagrupando os termos, obtém-se:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{jk}^* \hat{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{jk}^* \hat{b}_k d\Omega, \quad (\text{II.55})$$

onde \hat{p}_k e \hat{b}_k são dadas pelas Expressões (II.46).

O cálculo dos limites das integrais, quando ε tende a zero, fornece a expressão desejada:

$$\begin{aligned} c_{jk}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) &= \\ &= \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x) \hat{p}_k(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} u_{jk}^*(\xi, x) \hat{b}_k(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

A integral do lado esquerdo da Equação (II.56) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfaz a condição de HÖLDER [3]:

$$\left| u_k(x) - u_k(\xi) \right| \leq B \Omega^\alpha \quad (\text{II.57})$$

sendo B e α constantes positivas.

O coeficiente $c_{jk}(\xi)$ é dado pela seguinte expressão:

$$c_{jk}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\overline{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad , \quad (\text{II.58})$$

sendo demonstrado que $c_{jk}(\xi) = \delta_{jk}/2$ para contornos suaves, caso contrário, expressões para este coeficiente podem ser obtidas nas referências [4, 20]. Para o ponto ξ no domínio, tem-se $c_{jk}(\xi) = 1$, o que reproduz a Equação (II.45) e para pontos externos ao corpo, tem-se $c_{jk}(\xi) = 0$. O cálculo do coeficiente $c_{jk}(\xi)$ torna-se trabalhoso, portanto, nas aplicações práticas, geralmente é obtido indiretamente, utilizando deslocamentos de corpo rígido.

A Equação (II.56) fornece uma relação entre as forças de superfície e deslocamentos que deve ser satisfeita. Portanto, introduzindo as condições de contorno, obtêm-se as incógnitas apenas no contorno.

II.3.4 - Regiões infinitas

A extensão da Equação (II.56), para regiões infinitas com uma ou mais cavidades internas, requer uma análise cuidadosa do comportamento das funções envolvidas. Esta análise está relacionada ao comportamento das funções sobre uma superfície de contorno infinitamente distante das cavidades.

Seja ρ o raio de uma esfera de superfície Γ_ρ , centrada em ξ , que envolve as cavidades do problema externo representado na Figura (II.10). A Equação (II.56) pode ser escrita para a região situada entre Γ e Γ_ρ como:

$$\begin{aligned}
& c_{jk}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Gamma_\rho} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) = \\
& = \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Gamma_\rho} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x), \quad \xi \in \Gamma \quad (\text{II.59})
\end{aligned}$$

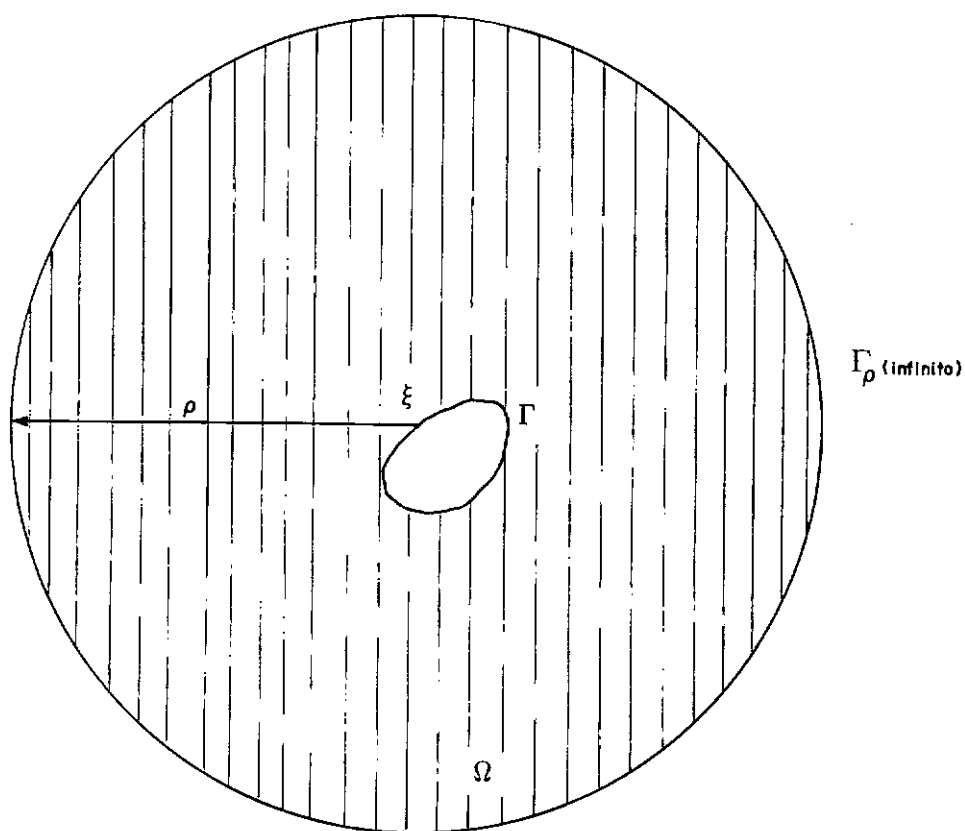


Fig.II.10 - Definição da região infinita com cavidade interna

Tirando o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, a Equação (II.59) pode ser escrita em termos de integrais em Γ apenas se for satisfeita a condição de regularidade:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} \left[p_{jk}^* (\xi, x) u_k(x) - u_{jk}^* (\xi, x) p_k(x) \right] d\Gamma(x) = 0 \quad (\text{II.60})$$

Para problemas bidimensionais, considerando o contorno no infinito, portanto $x \in \Gamma_\rho$, tem-se:

$$d\Gamma(x) = |J| d\phi, \quad \text{onde } |J| = O(\rho);$$

$$u_{jk}^* (\xi, x) = \begin{cases} O(\ln \rho + 1) & , \quad j = k \\ O(1) & , \quad j \neq k \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

$$p_{jk}^* (\xi, x) = O(\rho^{-1})$$

Se a carga total aplicada sobre a superfície Γ não for auto-equilibrada, o princípio de Saint-Venant mostra que $u_j(x)$ e $p_j(x)$ terão o mesmo comportamento da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção resultante. Consequentemente, $u_k(x) = O(\ln \rho + 1)$ e $p_k(x) = O(\rho^{-1})$ são obtidos, o que não garante, em geral, a anulação de cada termo separadamente. No entanto, pode-se substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ pelos tensores correspondentes à solução fundamental e então verificar que a Equação (II.60) é satisfeita, cancelando os termos, quando $\rho \rightarrow \infty$.

Portanto, pode-se afirmar que a condição de regularidade é sempre satisfeita se $u_k(x)$ e $p_k(x)$ se comportam, na pior das hipóteses, como a solução fundamental no infinito.

Na análise desenvolvida anteriormente não se considerou as forças de volume generalizadas. Para estas, apresentadas mais adiante (Ítem II.3.7), nota-se que o peso próprio e a força centrífuga violam as condições de regularidade, enquanto que, a carga térmica, se a distribuição de temperatura e sua derivada em relação à normal, se comportarem, como a solução fundamental no infinito, para potencial bi-dimensional, governado pela equação de LAPLACE [18], a condição de regularidade sempre será satisfeita (vide Apêndice F).

II.3.5 - Tensões nos pontos internos

As derivadas da Equação (II.45) em relação às coordenadas do ponto ξ para as integrais no contorno, podem ser calculadas sem maiores problemas, o que não ocorre com a integral de volume, a qual apresenta uma singularidade no ponto ξ . Como, neste trabalho, estudaram-se apenas casos em que esta integral pudesse ser transformada numa integral de contorno, através do tensor de Galerkin (vide ítem (II.3.7)), não houve aqui a preocupação em demonstrar a validade desta derivada no interior da integral do domínio, podendo a mesma ser verificada na referência [18].

Como a Equação (II.45) é uma representação contínua dos deslocamentos nos pontos internos, pode-se derivá-la, sem maio-

res dificuldades, em relação às coordenadas do ponto ξ . Substituindo suas derivadas na Equação (II.20) e já efetuando a operação $\partial r / \partial x_j(\xi) = -\partial r / \partial x_j(x)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{klj}^*(\xi, x) \hat{p}_j(x) d\Gamma(x) - \\ & - \int_{\Gamma} p_{klj}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} u_{klj}^*(\xi, x) \hat{b}_j(x) d\Gamma(x) - \\ & - 2G \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha T(\xi) \delta_{kl} \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

sendo,

$u_{klj}^* = -\sigma_{klj}^*$ apresentado no ítem (II.3.2),

$$\begin{aligned} p_{klj}^* = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{kl} r_{,j} + \nu (\delta_{kj} r_{,l} + \delta_{lj} r_{,k}) \right. \right. \\ & - 4 r_{,k} r_{,l} r_{,j} \left. \right] + 2\nu (n_k r_{,l} r_{,j} + n_l r_{,k} r_{,l}) + \\ & \left. + (1-2\nu) (2 n_j r_{,k} r_{,l} + n_l \delta_{kj} + n_k \delta_{lj}) - (1-4\nu) n_j \delta_{kl} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

onde as derivadas estão todas em termos das coordenadas de x .

II.3.6 - Tensões no contorno

Após a resolução do problema, têm-se forças de superfície e deslocamentos em qualquer ponto do contorno no sistema de referência global.

Utilizando a matriz de transformação para tensor de 1ª ordem [21], determinam-se os deslocamentos e as forças de superfície em relação a um sistema de referência local ao elemento considerado (Figura II.11).

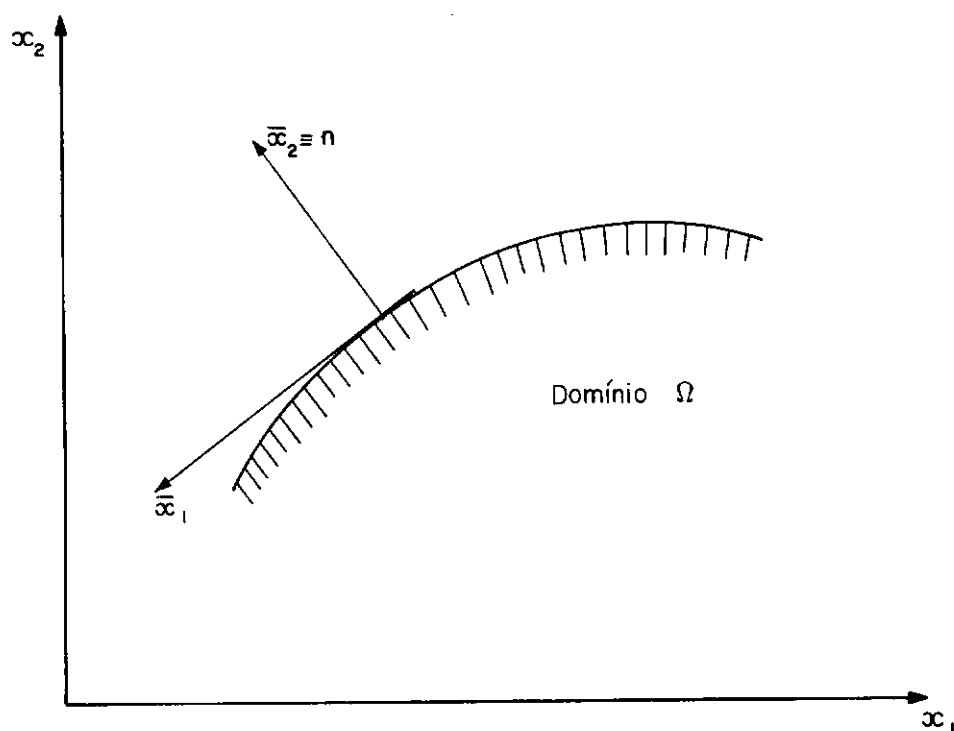


Fig.II.11 - Sistema de referência local ao elemento

A equação de Cauchy (II.4), para o sistema de referência local, fornece:

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1$$

(II.64)

A componente de deformação para este sistema de referência é dada por:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (\text{II.65})$$

onde o deslocamento \bar{u}_1 é interpolado ao longo do elemento em termos dos pontos nodais.

Para o estado plano de deformação, a lei de Hooke generalizada (Equação (II.17)) fornece:

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{1-\nu} \left[(1-2\nu) \frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} - \nu \bar{\varepsilon}_{11} + (1+\nu) \alpha T \right] \quad (\text{II.66})$$

Substituindo a Equação (II.66) na lei de Hooke generalizada, agora para obter a tensão $\bar{\sigma}_{11}$, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{(1-\nu)} \left[\nu \bar{\sigma}_{22} + 2G \bar{\varepsilon}_{11} - (1+\nu) 2G \alpha T \right] \quad (\text{II.67})$$

Portanto, as Equações (II.64) e (II.67) fornecem as tensões em um ponto qualquer do contorno em relação ao sistema de referência local do elemento. Usando, agora, a matriz de transformação para tensor de 2ª ordem, obtêm-se as tensões em relação ao sistema de referência global.

No Apêndice C encontram-se as tensões no contorno para o elemento linear descontínuo, no sistema de referência global, em termos dos deslocamentos e forças de superfície no sistema de referência global.

II.3.7 - Forças de volume generalizadas

A Equação (II.56), agrupando os termos referentes à carga térmica na segunda integral de volume, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 c_{jk}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) = \\
 = \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) + \\
 + \int_{\Omega} u_{jk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) + \\
 + 2G\alpha \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Omega} u_{jk,k}^*(\xi, x) T(x) d\Omega(x) \quad (II.68)
 \end{aligned}$$

Nota-se, portanto, que para a resolução desta equação precisa-se de integrar sobre o domínio, implicando na discretização do mesmo. Ainda que isto seja verdade, no caso geral de forças de volume, em alguns casos práticos, a integral de domínio pode ser transformada em uma integral de contorno [22, 23] e ser calculada numericamente, junto com as outras integrais de superfície do problema. Para esta transformação, emprega-se o tensor de Galerkin G_{ij}^* que se relaciona com a solução fundamental u_{jk}^* por meio da seguinte equação:

$$u_{jk}^* = G_{jk,\ell\ell}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j\ell,k\ell}^* \quad (II.69)$$

onde G_{jk}^* pode ser encarado como 2 vetores de Galerkin, cada um correspondendo à direção j da carga unitária aplicada, da mesma maneira que u_{jk}^* pode ser encarado como 2 vetores de deslocamento, correspondendo a cada direção j da carga unitária.

Para a solução fundamental de Kelvin, estado plano de deformação, o tensor de Galerkin é dado pela seguinte expressão:

$$G_{jk}^* = \frac{-1}{8\pi G} r^2 \ln r \delta_{jk} \quad (\text{II.70})$$

Utilizando o tensor de Galerkin para fazer a transformação da integral de domínio para integral de contorno, demonstrada no apêndice D, a Equação (II.68) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} c_{jk} u_k + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma} d_j^v d\Gamma + \int_{\Gamma} d_j^t d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

onde as duas últimas integrais correspondem à força de volume e carga térmica, respectivamente, sendo a primeira obtida para peso próprio e força centrífuga, devido a rotação em torno de um eixo fixo.

Escrevendo a Equação (II.71), para deslocamentos nos pontos internos, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_j(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} d_j^v d\Gamma + \int_{\Gamma} d_j^t d\Gamma
\end{aligned} \quad (II.72)$$

Derivando a Equação (II.72) em relação as coordenadas do ponto ξ , sendo estas realizadas dentro das integrais de contorno (vide apêndice D), e substituindo na Equação (II.20), obtêm-se as tensões para os pontos internos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{jk}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{jkl}^* p_l d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{jkl}^* u_l d\Gamma + \int_{\Gamma} s_{jk}^v d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} s_{jk}^t d\Gamma - 2G \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha T(\xi) \delta_{jk}
\end{aligned} \quad (II.73)$$

onde u_{jkl}^* e p_{jkl}^* são dados pelas expressões do item (II.3.5), sendo s_{jk}^v e s_{jk}^t obtidos neste item.

Substituindo a Expressão (II.70) na Expressão (II.69) obtem-se:

$$u_{jk}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{jk} - r_{,j} r_{,k} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{jk} \right] \quad (II.74)$$

É importante salientar aqui que a Expressão (II.74) difere da Expressão (II.47) apresentada no item (II.3.2) de uma constante, não tendo importância teórica, pois corresponde a movimentos de corpo rígido. Portanto, deve-se utilizar a Expressão

(II.74) para a teoria apresentada neste ítem, sendo que todas expressões estão escritas para o estado plano de deformação.

II.3.7.1 - Força de volume

Para simplificar esta apresentação, a primeira integral de volume da Equação (II.68) será representada por:

$$B_j^v = \int_{\Omega} u_{jk}^* (\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (II.75)$$

Substituindo a Expressão (II.69) em (II.75), tem-se:

$$B_j^v = \int_{\Omega} \left[G_{jk,\ell\ell}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j\ell,k\ell}^* \right] b_k d\Omega \quad (II.76)$$

a) Peso próprio

Um corpo com densidade de massa constante ρ , num campo gravitacional g , também constante, sofre uma força de volume dada por:

$$b_k = \rho g_k \quad (II.77)$$

Substituindo (II.77) em (II.76) e utilizando o teorema da divergência, obtem-se a integral do contorno referenciada na Equação (II.71), cujo integrando é escrito como:

$$d_j^v = \frac{\rho r}{8\pi G} \left\{ \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] \left[g_j n_k r_{,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} g_k r_{,k} n_j \right] \right\} \quad (II.78)$$

que, derivando, obtem-se o termo referenciado na Equação (II.73):

$$\begin{aligned}
S_{jk}^v = \frac{\rho}{8\pi} & \left\{ 2 n_m r_{,m} (g_j r_{,k} + g_k r_{,j}) + \right. \\
& + \frac{1}{1-\nu} \left\{ v \delta_{jk} \left[2 n_m r_{,m} g_s r_{,s} + \left(1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right) g_m n_m \right] - \right. \\
& - g_m r_{,m} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) + \\
& \left. \left. + \frac{1-2\nu}{2} \left(1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right) (g_j n_k + g_k n_j) \right\} \right\} \quad (II.79)
\end{aligned}$$

b) Força centrífuga

Seja um corpo rodando com uma velocidade angular ω_j . Se o eixo passa pela origem do sistema de coordenadas, o problema é equivalente a uma força de volume do tipo:

$$b_k = g_{jk} x_j \quad (II.80)$$

onde x_j é a coordenada do ponto e g_{jk} coeficiente da matriz contendo as velocidades angulares, que numa forma geral é escrita como:

$$\tilde{G} = \rho \begin{bmatrix} \omega_2^2 + \omega_3^2 & -\omega_1 \omega_2 & -\omega_3 \omega_1 \\ & \omega_3^2 + \omega_1^2 & -\omega_2 \omega_3 \\ \text{SIM} & & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix} \quad (II.81)$$

Para o caso bidimensional, têm-se duas posições possíveis para o eixo de rotação, portanto a matriz \underline{G} se reduz a:

1^a) Eixo pertence ao plano do problema, o que implica em $\omega_3 = 0$

$$\underline{G} = \rho \begin{bmatrix} \omega_2^2 & -\omega_1 \omega_2 \\ -\omega_1 \omega_2 & \omega_1^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.82})$$

2^a) Eixo perpendicular ao plano do problema, consequentemente $\omega_1 = \omega_2 = 0$, portanto

$$\underline{G} = \rho \begin{bmatrix} \omega_3^2 & 0 \\ 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

Substituindo (II.80) em (II.76) e aplicando o teorema da divergência, obtém-se para os dois casos:

$$\begin{aligned} d_j^v = \frac{r}{8\pi G} \left\{ \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] \left[n_m r_{,m} x_s g_{sj} - \frac{r_{,m} g_{ms} x_s n_j}{2(1-\nu)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} n_m g_{mj} r \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{II.84}) \end{aligned}$$

que, derivando, tem-se:

$$\begin{aligned}
S_{jk}^v = \frac{1}{8\pi} & \left\{ 2 n_m r_{,m} (x_s g_{sj} r_{,k} + x_s g_{sk} r_{,j}) + \right. \\
& + \frac{1}{1-\nu} \left\{ \nu \delta_{jk} \left[2 n_m r_{,m} r_{,s} g_{sq} x_q + \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] (x_m g_{ms} n_s - \right. \right. \\
& - n_m g_{ms} r_{,s} r) \right] + \frac{1-2\nu}{2} \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \left[x_m g_{mj} n_k + \right. \\
& + x_m g_{mk} n_j - (n_m g_{mj} r_{,k} + n_m g_{mk} r_{,j}) r \right] - \\
& \left. \left. - r_m g_{ms} x_s (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) \right\} \right\} \quad (II.85)
\end{aligned}$$

II.3.7.2 - Carga térmica

Seja agora analisar a segunda integral de volume da Equação (II.68):

$$B_j^t = 2G\alpha \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Omega} u_{jk,k}^* (\xi, x) T(x) d\Omega(x) \quad (II.86)$$

Substituindo a Equação (II.69) em (II.86), obtem-se:

$$B_j^t = G \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha \int_{\Omega} G_{jk,k\ell\ell}^* T d\Omega \quad (II.87)$$

Levando em consideração o caso de fluxo estacionário (Equação (II.24)), a Equação (II.87) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 B_j^t &= G \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \alpha \int_{\Omega} \left[G_{jk,k\ell\ell}^* T - G_{jk,k}^* T_{,\ell\ell} \right] d\Omega \\
 &= G \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} \left[G_{jk,k\ell}^* T - G_{jk,k}^* T_{,\ell} \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{II.88}$$

A Expressão (II.87) pode ser transformada numa integral de contorno, utilizando o teorema da divergência:

$$B_j^t = G \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \alpha \int_{\Gamma} \left[G_{jk,k\ell}^* T - G_{jk,k}^* T_{,\ell} \right] n_{\ell} d\Gamma \tag{II.89}$$

A Equação (II.89) pode ser escrita como na última integral apresentada na Equação (II.71), ou seja:

$$B_j^t = \int_{\Gamma} d_j^t d\Gamma \tag{II.90}$$

$$\text{onde } d_j^t = G \left(\frac{1+v}{1-v} \right) \alpha \left[G_{jk,k\ell}^* T - G_{jk,k}^* T_{,\ell} \right] n_{\ell} , \tag{II.91}$$

sendo d_j^t desmembrado em dois termos, tais como:

$$d_j^t = \bar{P}_j T - \bar{Q}_{j,\ell} T_{,\ell} n_{\ell} \tag{II.92}$$

$$\text{onde } \bar{P}_j = G \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \alpha G_{jk,k\ell}^* n_\ell$$

$$\bar{Q}_j = G \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right) \alpha G_{jk,k}^*$$
(II.93)

Substituindo a Equação (II.92) em (II.90) e já introduzindo a expressão do tensor de Galerkin (II.70), tem-se

$$B_j^t = \int_{\Gamma} \bar{P}_j T \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_j T_{,\ell} n_\ell \, d\Gamma,$$
(II.94)

$$\text{onde } \bar{P}_j = \frac{(1 + \nu)}{4\pi (1 - \nu)} \alpha \left\{ \left[\ell n \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] n_j - r_{,j} r_{,k} n_k \right\}$$
(II.95)

$$\bar{Q}_j = \frac{(1 + \nu)}{4\pi (1 - \nu)} \alpha r_{,j} \left[\ell n \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right]$$

Fazendo $s_{jk}^t = \bar{S}_{jk} T - \bar{V}_{jk} T_{,k} n_k$, a última integral da Equação (II.73) pode ser desmembrada em

$$\bar{B}_j^t = \int_{\Gamma} \bar{S}_{jk} T \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{V}_{jk} T_{,k} n_k \, d\Gamma$$
(II.96)

$$\text{onde } \bar{S}_{jk} = \frac{\alpha G (1 + \nu)}{2\pi (1 - \nu) r} \left[n_m r_{,m} \left(\frac{\delta_{jk}}{1 - 2\nu} - 2 r_{,j} r_{,k} \right) + n_j r_{,k} + n_k r_{,j} \right]$$

$$\bar{V}_{jk} = \frac{G (1 + \nu)}{2\pi (1 - \nu)} \left[r_{,j} r_{,k} + \frac{\delta_{jk}}{1 - 2\nu} \left(\frac{1 + 2\nu}{2} - \ell n \left(\frac{1}{r} \right) \right) \right]$$
(II.97)

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

III.1 - Introdução

A Equação (II.56), apresentada no Capítulo anterior, é a equação básica para resolução dos problemas utilizando o MEC. Sendo muito difícil e trabalhosa a obtenção de soluções analíticas fechadas, para a maioria dos problemas no campo da Engenharia, foram desenvolvidos e estudados procedimentos numéricos (aproximados) para soluções de tais problemas. O procedimento empregado neste trabalho é resumidamente descrito a seguir [17, 21, 24].

Os contornos e as interfaces entre as subregiões são discretizados em uma série de elementos sobre os quais deslocamentos e forças de superfícies são interpolados em função dos valores nodais.

A Equação (II.56) é escrita, em forma discretizada, para cada ponto fonte ξ aplicado nos pontos nodais funcionais e as integrais sobre cada elemento são calculadas. Um sistema de equações algébricas com valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies nos contornos e interfaces, é obtido.

As condições de contorno e as equações de compatibilidade e equilíbrio nos pontos nodais das interfaces são impostas e o sistema de equações pode então ser resolvido, obtendo as incógnitas nos contornos e interfaces.

Os valores dos deslocamentos e tensões, em quaisquer pontos do domínio, podem então ser calculados em função dos deslocamentos e forças de superfícies dos contornos e interfaces.

As forças de volume, por serem conhecidas, contribuem apenas para o termo independente.

Para discretização dos contornos ou interfaces utilizaram-se tipos diferentes de elementos, sendo contínuos, descontínuos e de transições (Figura III.1), todos interpolados linearmente.

O elemento contínuo é aquele em que os nós geométricos coincidem com os nós funcionais (Figura III.1.a), sendo o elemento de transição aquele em que apenas um dos nós geométricos coincide com o nó funcional (Figura III.1.b), enquanto que no elemento descontínuo os nós geométricos não coincidem com os nós funcionais (Figura III.1.c).

$$\Gamma = \sum_{s=1}^{NE} \Gamma_s$$

III.2 - Funções de Interpolação

As coordenadas cartesianas \underline{x} , dos pontos de contorno situados ao longo do elemento Γ_s , são expressas em termos das coordenadas dos nós geométricos \underline{x}^{sm} , relacionados pelas funções de interpolação ψ^m (Figura III.2), ou seja:

$$\underline{x} = \sum_{m=1}^2 \underline{I} \psi^m \underline{x}^{sm} = \underline{\psi} \underline{x}^S, \quad s = 1, NE; \quad (\text{III.1})$$

onde NE é o número total de elementos (contornos e interfaces) e \underline{I} matriz identidade 2×2 .

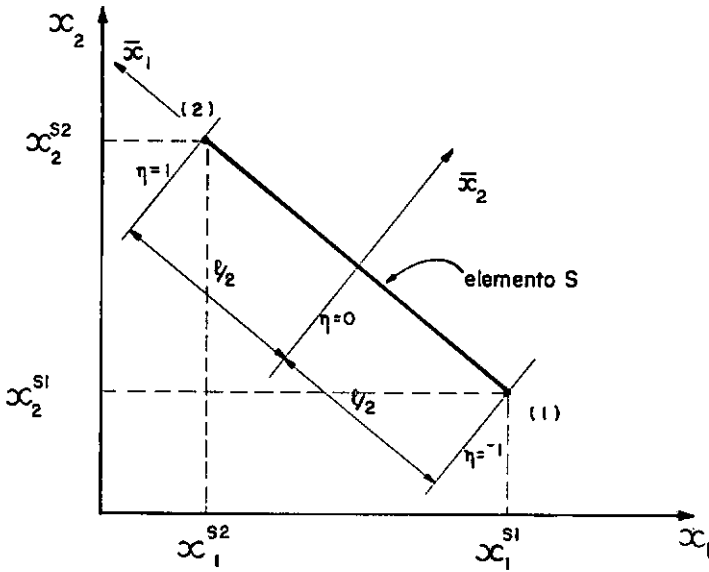


Fig.III.2 - Coordenadas cartesianas do elemento s

Então:

$$\underline{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\psi} = \begin{bmatrix} \psi^1 & 0 & \psi^2 & 0 \\ 0 & \psi^1 & 0 & \psi^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}^S = \begin{Bmatrix} x_1^{S1} \\ x_2^{S1} \\ x_1^{S2} \\ x_2^{S2} \end{Bmatrix},$$

onde η é a coordenada adimensional $\eta = 2 \bar{x}_1 / \ell$ e ψ^1, ψ^2 são dados por:

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \frac{1}{2} (1 - \eta) \quad , \quad \eta \in [-1, 1] \\ \psi^2 &= \frac{1}{2} (1 + \eta) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Os deslocamentos e forças de superfícies \underline{u} e \underline{p} dos pontos do contorno, situados ao longo do elemento Γ_s , são expressos em termos dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente dos nós funcionais \underline{u}^{sn} e \underline{p}^{sn} , relacionados pelas funções de interpolação ϕ^n (Figura III.3), ou seja:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \sum_{n=1}^2 \underline{I} \phi^n \quad \underline{u}^{sn} = \underline{\phi} \underline{u}^s \quad s = 1, 2, \\ \underline{p} &= \sum_{n=1}^2 \underline{I} \phi^n \quad \underline{p}^{sn} = \underline{\phi} \underline{p}^s \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

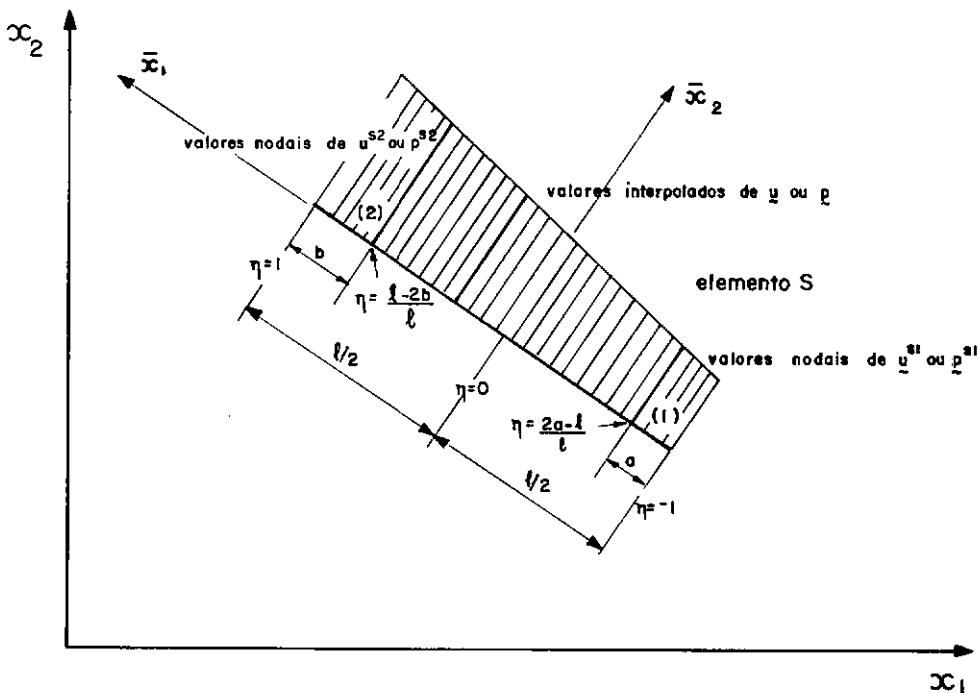


Fig.III.3 - Deslocamentos e forças de superfícies do elemento s

Então:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & \phi^2 \end{bmatrix}, \quad u^s = \begin{Bmatrix} u_1^{s1} \\ u_2^{s1} \\ u_1^{s2} \\ u_2^{s2} \end{Bmatrix} \quad e$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}, \quad p^s = \begin{Bmatrix} p_1^{s1} \\ p_2^{s1} \\ p_1^{s2} \\ p_2^{s2} \end{Bmatrix}$$

onde η é a coordenada adimensional $\eta = 2 \bar{x}_1/\ell$ e ϕ^1, ϕ^2 são dados por:

$$\phi^1 = \frac{\ell(1 - \eta) - 2b}{2(\ell - a - b)}, \quad \eta \in [-1, 1] \quad (\text{III.4})$$

$$\phi^2 = \frac{\ell(1 + \eta) - 2a}{2(\ell - a - b)}$$

onde ℓ é o comprimento do elemento, a e b constantes geométricas.

Notar que estas funções são válidas para quaisquer dos tipos de elementos mencionados anteriormente, bastando substituir os valores corretos para a e b , os quais podem ser iguais ou não, ou seja:

a) Elemento descontínuo (Figura III.c):

$$0 < a < \ell/2 \quad e \quad 0 < b < \ell/2$$

b) Elemento de transição:

b.1) Contínuo à esquerda (Figura III.1.b.1):

$$a = 0 \quad e \quad 0 < b < \ell/2$$

b.2) Contínuo à direita (Figura III.1.b.2):

$$b = 0 \quad e \quad 0 < a < \ell/2$$

c) Elemento contínuo (Figura III.1.a):

$$a = b = 0$$

III.3 - Equações do MEC na Forma Matricial

A Equação (II.71) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{jk}(\xi) u_k(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \\ & - \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Gamma} d_j(\xi, x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

onde $d_j = d_j^v + d_j^t$ dado no ítem (II.3.7).

Escrevendo a Equação (III.5) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{C}(\xi) \underline{u}(\xi) = & \int_{\Gamma} \underline{U}^*(\xi, \mathbf{x}) \underline{p}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\
 & - \int_{\Gamma} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \underline{u}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
 & + \int_{\Gamma} \underline{d}(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad \quad \quad (\text{III.6})
 \end{aligned}$$

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados [25] na Equação (III.6), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \underline{w}^i(\xi) \underline{C}(\xi) \underline{u}(\xi) d\Gamma(\xi) = & \int_{\Gamma} \underline{w}^i(\xi) \int_{\Gamma} \underline{U}^*(\xi, \mathbf{x}) \underline{p}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\xi) - \\
 & - \int_{\Gamma} \underline{w}^i(\xi) \int_{\Gamma} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \underline{u}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\xi) + \\
 & + \int_{\Gamma} \underline{w}^i(\xi) \int_{\Gamma} \underline{d}(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) d\Gamma(\xi) \quad \quad \quad (\text{III.7})
 \end{aligned}$$

Neste trabalho, utilizou-se o Método da Colocação para a obtenção do sistema de equações do MEC, portanto as funções de ponderação são as "funções" delta de Dirac:

$$\underline{w}^i(\xi) = \begin{bmatrix} \Delta(\xi^i, \xi) & 0 \\ 0 & \Delta(\xi^i, \xi) \end{bmatrix}, \quad i = 1, NN \quad (\text{III.8})$$

sendo ξ^i pontos seleccionados no contorno coincidentes com os nós funcionais, NN o número total de nós funcionais e as "funções" $w^i(\xi)$ aplicadas nas duas direcções.

Substituindo estas funções (III.8) na Equação (III.7) e utilizando as propriedades das "funções" Delta de Dirac, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{c}(\xi^i) \underline{u}(\xi^i) &= \int_{\Gamma} \underline{u}^*(\xi^i, x) \underline{p}(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \underline{p}^*(\xi^i, x) \underline{u}(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Gamma} \underline{d}(\xi^i, x) d\Gamma(x) \quad , \quad \xi^i \in \Gamma \quad (\text{III.9}) \end{aligned}$$

Colocando as incógnitas $\underline{u}(x)$ e $\underline{p}(x)$ em função de seus valores nos pontos nodais funcionais, a Equação (III.9) torna:

$$\begin{aligned} \underline{c}(\xi^i) \underline{u}(\xi^i) &= \sum_{s=1}^{NE} \int_{\Gamma_s} \underline{u}^*(\xi^i, x) \phi(\eta) \underline{p}^s d\Gamma(x) - \\ &- \sum_{s=1}^{NE} \int_{\Gamma_s} \underline{p}^*(\xi^i, x) \phi(\eta) \underline{u}^s d\Gamma(x) + \\ &+ \sum_{s=1}^{NE} \int_{\Gamma_s} \underline{d}(\xi^i, x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.10}) \end{aligned}$$

Como as funções de interpolação são normalmente expressas em termos da coordenada adimensional η , deve-se escrever $d\Gamma$ em relação a esse sistema de coordenadas intrínsecas:

$$d\Gamma = |\underline{J}| d\eta \quad (\text{III.11})$$

onde o jacobiano da transformação é dado por:

$$|\underline{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (\text{III.12})$$

sendo que para elemento linear, $|\underline{J}| = \frac{\ell}{2}$ em todo o elemento.

Fazendo a transformação de variáveis na Equação (III.10), obtem-se:

$$\begin{aligned} \underline{C}(\xi^i) \underline{u}(\xi^i) + \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{u}^s = \\ = \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{p}^s + \\ + \sum_{s=1}^{NE} \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{d}(\xi^i, x) d\eta ; i = 1, NN \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Aplicando a Equação (III.13) aos NN nós funcionais, obtém-se um sistema de $2NN$ equações lineares, contendo $2NN$ incógnitas, entre elas deslocamentos e forças de superfície:

$$(\underline{C} + \underline{\hat{H}}) \underline{u} = \underline{G} \underline{p} + \underline{b} \quad (\text{III.14})$$

onde \underline{u} e \underline{p} contêm os deslocamentos e as forças de superfície, respectivamente, dos pontos nodais funcionais, as matrizes $\underline{\hat{H}}$ e \underline{G} são as matrizes dos coeficientes de influência da estrutura, \underline{b} o vetor contendo valores prescritos das forças de volume e \underline{C} uma matriz quase-diagonal, cujos coeficientes dependem da geometria onde se está aplicando o ponto fonte ξ , sendo que esta pode ser incorporada na matriz $\underline{\hat{H}}$ para obter o seguinte sistema:

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} + \underline{b} \quad (\text{III.15})$$

Introduzindo as condições de contorno e reorganizando as matrizes \underline{H} e \underline{G} , para obter uma matriz \underline{A} , contendo os coeficientes referentes às incógnitas do problema (deslocamentos e forças de superfície) e um vetor \underline{f} , contendo a soma das contribuições de \underline{H} e \underline{G} referentes aos valores prescritos mais o vetor \underline{b} , obtem-se um sistema de equações que, resolvido, fornece os deslocamentos e as forças de superfície no contorno:

$$\underline{A} \underline{y} = \underline{f} \quad (\text{III.16})$$

sendo \underline{A} matriz dos coeficientes de influência mista da estrutura, cheia (quando se utiliza apenas uma região) e não simétrica, \underline{y} o vetor das incógnitas e \underline{f} o vetor independente.

Determinados todos os deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais funcionais do contorno, os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto do domínio podem então ser obti-

dos. Para isto, utilizam-se as Equações (II.72) e (II.73), as quais são escritas nas seguintes formas matriciais:

$$\begin{aligned}
 \underline{u}(\xi^i) = & \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{U}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{\bar{p}}^s - \\
 & - \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{P}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{\bar{u}}^s + \\
 & + \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{d}(\xi^i, x) d\eta \right\}, \quad i = 1, NI \quad (\text{III.17})
 \end{aligned}$$

sendo NI o número total de pontos internos, agora $\underline{\bar{p}}^s$ e $\underline{\bar{u}}^s$ valores já determinados e $\xi^i \in \Omega$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma}(\xi^i) = & \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{U}^{I*}(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{\bar{p}}^s - \\
 & - \sum_{s=1}^{NE} \left\{ \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{P}^{I*}(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \right\} \underline{\bar{u}}^s + \\
 & + \sum_{s=1}^{NE} \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{s}(\xi^i, x) d\eta - \\
 & - 2G \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha T(\xi^i) \underline{I}, \quad i = 1, NI \quad (\text{III.18})
 \end{aligned}$$

onde \underline{s} é o vetor contendo os coeficientes $s_{jk}^v + s_{jk}^t$ e,

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}, \quad \underline{U}^{I*} = \begin{bmatrix} u_{111}^* & u_{112}^* \\ u_{121}^* & u_{122}^* \\ u_{221}^* & u_{222}^* \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^{I*} = \begin{bmatrix} p_{111}^* & p_{112}^* \\ p_{121}^* & p_{122}^* \\ p_{221}^* & p_{222}^* \end{bmatrix}$$

III.4 - Matriz dos Coeficientes de Influência do Elemento

A Equação (III.13) fornece duas matrizes dos coeficientes de influência, para o elemento s de dimensões 2×4 , sendo:

$$\begin{aligned} \hat{H}^s &= \frac{\ell s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \\ \hat{G}^s &= \frac{\ell s}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{U}^*(\xi^i, x) \underline{\phi}(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Para o cálculo destas matrizes, deve-se levar em consideração a coincidência ou não do ponto fonte ξ^i com um dos nós funcionais do elemento Γ_s a ser integrado.

Neste trabalho, adotou-se o seguinte processo:

a) Quando $\xi^i \notin \Gamma_s$

As integrais foram calculadas por integração numérica de GAUSS [26]:

$$\hat{\tilde{H}}^S = \frac{\ell_S}{2} \sum_{k=1}^N \tilde{P}^*(\xi^i, x_k) \phi(\eta) w_k ,$$

sendo que $\tilde{H}^S = \hat{\tilde{H}}^S$, pois a submatriz \tilde{C} é igual a $\tilde{0}$,

$$\tilde{G}^S = \frac{\ell_S}{2} \sum_{k=1}^N \tilde{U}^*(\xi^i, x_k) \phi(\eta) w_k \quad (\text{III.20})$$

onde x_k é a coordenada do k-ésimo ponto de integração, w_k é o fator peso associado a cada ponto e N o número total de pontos de integração, listados no apêndice E.

b) Quando $\xi^i \in \Gamma_S$

Neste caso, adotou-se o método analítico, devido à singularidade apresentada, quando $r = 0$, cuja demonstração se encontra no apêndice B, sendo apresentadas, a seguir, as expressões obtidas.

b.1) Matriz \tilde{G}^S

Fazendo o produto das matrizes \tilde{U}^* e $\tilde{\phi}$ na Equação (III.19), obtem-se:

$$\tilde{G}^S = \frac{\ell_S}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} u_{11}^* \phi^1 & u_{12}^* \phi^1 & u_{11}^* \phi^2 & u_{12}^* \phi^2 \\ u_{21}^* \phi^1 & u_{22}^* \phi^1 & u_{21}^* \phi^2 & u_{22}^* \phi^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (\text{III.21})$$

Considerando a submatriz \underline{G}^n da matriz \underline{G}^S como:

$$\underline{G}^n = \frac{\ell s}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} u_{11}^* & \phi^n & u_{12}^* & \phi^n \\ u_{21}^* & \phi^n & u_{22}^* & \phi^n \end{bmatrix} d\eta, \quad (\text{III.22})$$

onde
$$g_{jk}^n = \frac{\ell s}{2} \int_{-1}^{+1} u_{jk}^* \phi^n d\eta$$

Supondo g_{jk}^{in} como a componente g_{jk} da submatriz \underline{G}^n (2×2), quando o ponto fonte ξ está aplicado no ponto nodal funcional i e se considera a n -ésima função de interpolação, e calculando estas integrais (vide apêndice B), obteve-se a seguinte expressão:

$$g_{jk}^{in} = \left\{ 2(\ell - 2B \delta_{in} - A) (\ell - A) \ln(\ell - A) + 2 \left[2(\ell - B) \delta_{in} - A \right] A \ln A - \right. \\ \left. - \left[\ell - 2A + 2(\ell - 2B) \delta_{in} \right] \ell \right\} \left\{ \frac{C_1 \delta_{jk}}{4(\ell - a - b)} + \frac{C_2 (\ell - 2B) \ell_j \ell_k}{2\ell (\ell - a - b)} \right. \quad (\text{III.23})$$

onde $A = \delta_{1i} a + \delta_{2i} b$, $B = \delta_{1n} b + \delta_{2n} a$, sendo a e b constantes geométricas definidas na Figura (III.3) e as demais constantes expressas como:

$$\ell_j = x_j^{S2} - x_j^{S1} \quad (\text{vide Figura (III.2)}) ,$$

$$C_1 = \frac{(4\nu - 3)}{8\pi (1 - \nu)G} \quad e \quad (III.24)$$

$$C_2 = \frac{1}{8\pi (1 - \nu)G}$$

b.2) Matriz \tilde{H}^S

Fazendo o mesmo produto mencionado no ítem anterior, sendo agora com as matrizes \tilde{P}^* e $\tilde{\phi}$, obtem-se:

$$\tilde{H}^S = \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} p_{11}^* \phi^1 & p_{12}^* \phi^1 & p_{11}^* \phi^2 & p_{12}^* \phi^2 \\ p_{21}^* \phi^1 & p_{22}^* \phi^1 & p_{21}^* \phi^2 & p_{22}^* \phi^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (III.25)$$

Considerando agora a submatriz \tilde{H}^n da matriz \tilde{H}^S como:

$$\tilde{H}^n = \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} p_{11}^* \phi^n & p_{12}^* \phi^n \\ p_{21}^* \phi^n & p_{22}^* \phi^n \end{bmatrix} d\eta, \quad (III.26)$$

onde

$$\hat{h}_{jk}^n = \frac{\ell_s}{2} \int_{-1}^{+1} p_{jk}^* \phi^n d\eta$$

Supondo agora \hat{h}_{jk}^{in} como a componente \hat{h}_{jk} da submatriz \tilde{H}^n (2 x 2), quando o ponto fonte ξ está aplicado no ponto nodal funcional i e se considera a n -ésima função de interpolação, e calculando estas integrais (vide Apêndice B), obteve-se a seguinte expressão:

$$\hat{h}_{jk}^{in} = C_3 \left[\ln A - \ln(\ell - A) \right] \delta_{in} + \frac{\ell C_3}{\ell - a - b}, \quad A \neq 0 \quad (\text{III.27})$$

onde $A = \delta_{1i} a + \delta_{2i} b$ e a constante C_3 escrita como:

$$C_3 = \frac{(1 - 2\nu) (\delta_{jk} - 1)^{k+n+1}}{4\pi (1 - \nu)} \quad (\text{III.28})$$

É importante salientar que, para a obtenção da matriz \underline{H}^S , foram utilizados dois procedimentos:

Quando o ponto fonte ξ coincidir com o nó inicial do elemento a ser integrado, determinou-se a segunda submatriz $\underline{H}^2 = \hat{\underline{H}}^2$ (2×2), apresentada na Equação (III.26) pela Expressão (III.27), enquanto que a primeira submatriz \underline{H}^1 foi obtida por movimento de corpo rígido, já incorporando a submatriz \underline{C} em $\hat{\underline{H}}^1$ (2×2).

Quando o ponto fonte ξ coincidir com o nó final do elemento a ser integrado, determinou-se a segunda submatriz por movimento de corpo rígido, sendo a primeira obtida pela Expressão (III.27).

III.5 - Movimentos de Corpo Rígido

III.5.1 - Regiões finitas

Como foi visto, as submatrizes, localizadas na diagonal de \underline{H} e que correspondem aos coeficientes da submatriz \underline{C} , podem ser calculadas através da imposição da condição de que translações de corpo rígido correspondem a forças de superfície nulas.

Aplicando então duas translações independentes, $u_k = \delta_{k_1}$ e $u_k = \delta_{k_2}$, chega-se a seguinte relação:

$$\sum_{\ell=1}^{NN} \underline{H}_{i\ell} \underline{u}_{\ell} = 0 \quad (i = 1, NN) \quad , \quad (III.29)$$

sendo $\underline{H}_{i\ell}$ submatrizes (2 x 2) de \underline{H} e \underline{u}_q as translações escritas na seguinte forma:

$$\underline{u}_{\ell} = \underline{I} \quad , \quad (III.30)$$

onde \underline{I} representa a matriz identidade de ordem 2.

A Equação (III.29) fornece as submatrizes da diagonal de \underline{H} , sendo estas escritas como a soma de todas as outras submatrizes da mesma linha com o sinal trocado, ou seja:

$$\underline{H}_{ii} = - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{NN} \underline{H}_{i\ell} \quad (i = 1, NN) \quad (III.31)$$

III.5.2 - Regiões infinitas

Neste caso, as translações de corpo rígido violam as condições de regularidades comentadas no ítem (III.3.4), pois $\underline{u}_q = 0(1)$, conseqüentemente deve-se considerar:

$$\begin{aligned}
c_{jk}(\xi^i) u_k(\xi^i) + u_k \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi^i, x) d\Gamma(x) + \\
+ u_k \int_{\Gamma_\rho} p_{jk}^*(\xi^i, x) d\Gamma(x) = 0
\end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

onde u_k corresponde às translações de corpo rígido e $\xi \in \Gamma$.

Como $p_{jk}^*(\xi^i, x)$ corresponde a cargas unitárias positivas aplicadas no ponto ξ na direção j , a condição de equilíbrio na região infinita leva a:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} p_{jk}^*(\xi^i, x) d\Gamma(x) = -\delta_{jk} \quad (\text{III.33})$$

Introduzindo a Expressão (III.33) em (III.32) e já colocando na forma discretizada, tem-se:

$$\underline{C}(\xi^i) \underline{u}(\xi^i) + \sum_{\ell=1}^{NN} \hat{H}_{i\ell} \underline{u}_\ell(x) - \underline{u}(x) \underline{I} = \underline{0} \quad (\text{III.34})$$

Separando as submatrizes da diagonal e já somando \underline{C} nestas, a Equação (III.34) pode ser escrita como:

$$\underline{u} \hat{H}_{ii} + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{NN} \hat{H}_{i\ell} \underline{u}_\ell - \underline{u} \underline{I} = \underline{0} \quad (\text{III.35})$$

Aplicando as translações de corpo rígido na Equação (III.35), obtem-se

$$\tilde{H}_{ii} = I - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{NN} \tilde{H}_{i\ell} \quad (i = 1, NN) \quad (\text{III.36})$$

Portanto, as Equações (III.31) e (III.36) fornecem uma maneira indireta de calcular as submatrizes da diagonal de \tilde{H} , evitando assim o cálculo analítico dos coeficientes de \tilde{C} e os valores principais de Cauchy.

III.6 - Simetria

Para corpos simétricos sujeitos a carregamentos e condições de apoio simétricos, pode-se discretizar apenas a metade ou um quarto do contorno, evitando assim as divisões e a aplicação de condições de contorno ao longo dos eixos de simetria.

Seja o corpo apresentado na Figura (III.4):

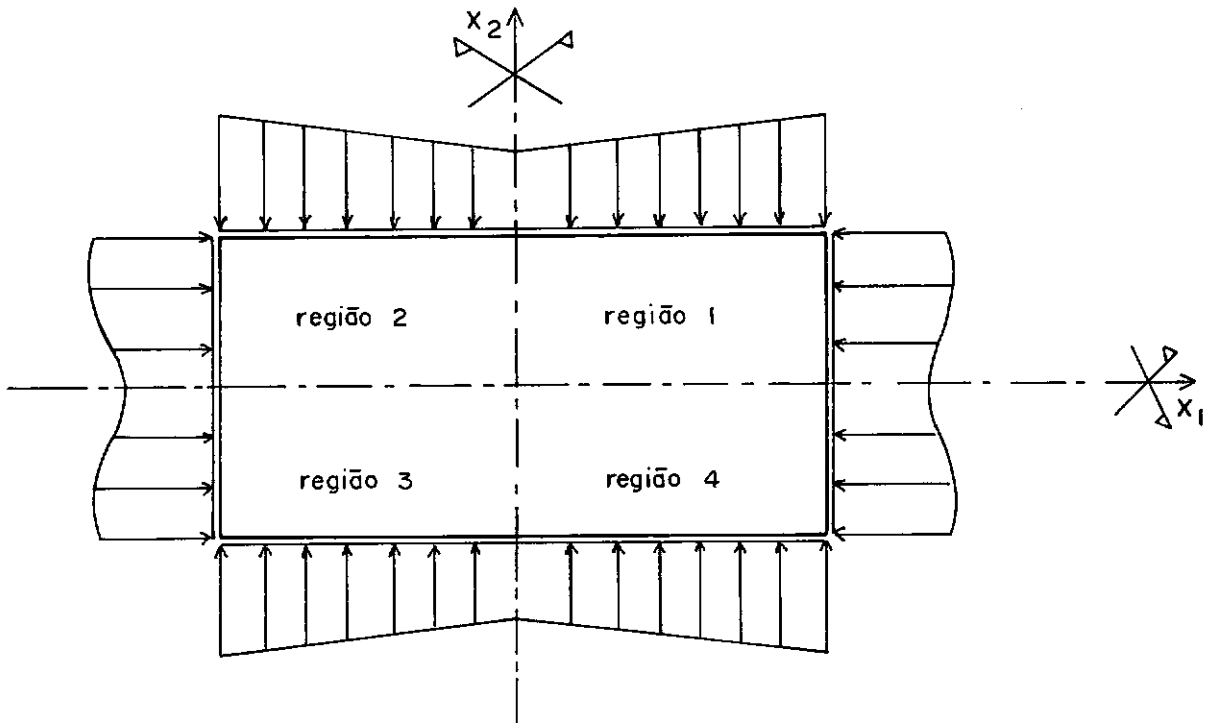


Fig.III.4 - Corpo simétrico sujeito a carregamento simétrico

Considerando $\tilde{H}_{i\ell}$ e $\tilde{G}_{i\ell}$ como submatrizes que relacionam os valores nodais do contorno da região ℓ , quando as cargas unitárias estão sendo aplicados a pontos nodais funcionais do contorno da região i do corpo. Os subvetores \underline{u}_ℓ e \underline{p}_ℓ contêm os valores nodais ao longo do contorno da região ℓ , bem como \underline{b}_ℓ contém os valores prescritos (forças de volume generalizadas) ao longo do contorno da região ℓ .

Portanto, tem-se o seguinte sistema escrito em função destas submatrizes e subvetores:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \tilde{H}_{13} & \tilde{H}_{14} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \tilde{H}_{23} & \tilde{H}_{24} \\ \tilde{H}_{31} & \tilde{H}_{32} & \tilde{H}_{33} & \tilde{H}_{34} \\ \tilde{H}_{41} & \tilde{H}_{42} & \tilde{H}_{43} & \tilde{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} & \tilde{G}_{14} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} & \tilde{G}_{23} & \tilde{G}_{24} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \tilde{G}_{33} & \tilde{G}_{34} \\ \tilde{G}_{41} & \tilde{G}_{42} & \tilde{G}_{43} & \tilde{G}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \\ \underline{p}_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \underline{b}_4 \end{Bmatrix}$$

Pode-se condensar as submatrizes, em função dos deslocamentos e forças de superfície da primeira região, na seguinte forma:

a) \tilde{H}_{12} (\tilde{G}_{12}) - Trocam-se os sinais dos termos que multiplicam \underline{u}_2 (\underline{p}_2) na direção x_1 e somam-se com \tilde{H}_{11} (\tilde{G}_{11})

\underline{b}_2 - Troca-se o sinal do termo na direção x_1 .

b) \tilde{H}_{13} (\tilde{G}_{13}) - Trocam-se os sinais dos termos que multiplicam \underline{u}_3 (\underline{p}_3) nas duas direções e somam-se com \tilde{H}_{11} (\tilde{G}_{11})

\underline{b}_3 - Trocam-se os sinais dos termos nas duas direções.

c) $\tilde{H}_{14} (\tilde{G}_{14})$ - Trocam-se os sinais dos termos que multiplicam $\tilde{u}_4 (\tilde{p}_4)$ na direção x_2 e somam-se com $\tilde{H}_{11} (\tilde{G}_{11})$

\tilde{b}_4 - Troca-se o sinal do termo na direção x_2 .

Ficando então, depois das operações, a, b e c com:

$$\tilde{H}_{11} \tilde{u}_1 = \tilde{G}_{11} \tilde{p}_1 + \tilde{b}_1$$

Portanto, pode-se automaticamente integrar sobre elementos refletidos e montar diretamente as matrizes reduzidas. Notar que \tilde{H}_{11} não é mais singular, visto que a condição de simetria já está embutida.

III.7 - Subregiões

Para corpos não homogêneos, mas que apresentam regiões homogêneas é preciso utilizar a técnica das subregiões. Podendo ser usada também em corpos esbeltos, sendo necessário fazer a subdivisão em regiões com as mesmas características físicas, tomando cuidado para avaliar a influência que as interpolações adicionais, introduzidas nas interfaces, promovem no corpo.

Esta técnica consiste em escrever a Equação (III.15) para cada região separadamente para posteriormente incorporar às equações de compatibilidade e de equilíbrio nas interfaces entre duas subregiões, permitindo a montagem de um único sistema de equações.

Para a explicação desta técnica, considera-se o corpo apresentado na Figura (III.5), onde as setas representam o sentido da integração.

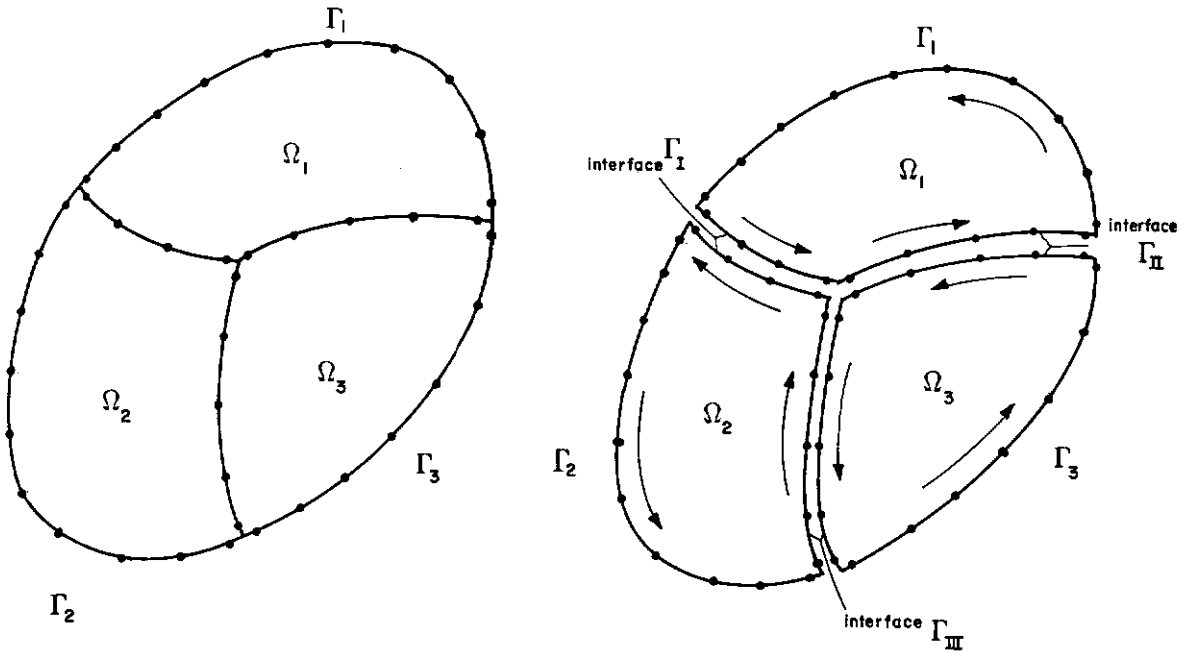


Fig.III.5 - Domínio dividido em três subregiões

Assumindo que:

$\tilde{H}_q^s, \tilde{G}_q^s$: matrizes dos coeficientes de influência, quando o ponto fonte ξ percorre todos os pontos nodais funcionais pertencentes ao contorno e as interfaces da subregião Ω_s e se fazem as integrações nos elementos do contorno ou interface Γ_q da mesma subregião,

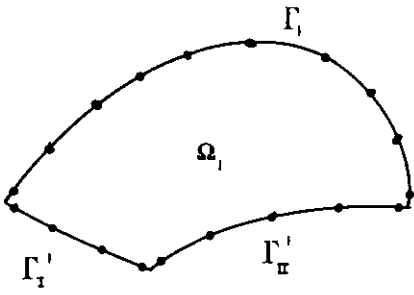
$\tilde{u}_q^s, \tilde{p}_q^s$: deslocamentos e forças de superfície na interface Γ_q , admitindo que esta faz parte da subregião Ω_s ,

$\tilde{u}_s^s, \tilde{p}_s^s$: deslocamentos e forças de superfície no contorno Γ_s ,

\underline{b}^s : forças de volume generalizadas no contorno e interfaces pertencentes à subregião Ω_s ,

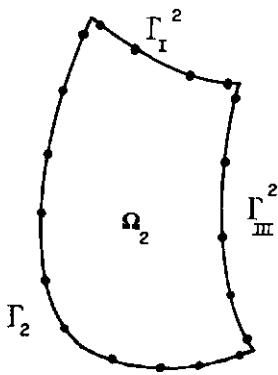
NS, NC, NI : número total de subregiões, contornos e interfaces, respectivamente.

Seja aplicar a Equação (III.15) para cada subregião Ω_s :



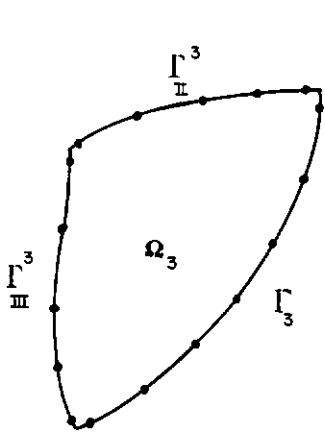
$$\begin{bmatrix} \underline{H}_1^1 & \underline{H}_I^1 & \underline{H}_{II}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}}^1 \\ \underline{\tilde{u}}_I^1 \\ \underline{\tilde{u}}_{II}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_1^1 & \underline{G}_I^1 & \underline{G}_{II}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{p}}^1 \\ \underline{\tilde{p}}_I^1 \\ \underline{\tilde{p}}_{II}^1 \end{Bmatrix} + \underline{\tilde{b}}^1$$

Fig.III.6 - Região Ω_1



$$\begin{bmatrix} \underline{H}_2^2 & \underline{H}_{III}^2 & \underline{H}_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}}^2 \\ \underline{\tilde{u}}_{III}^2 \\ \underline{\tilde{p}}_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_2^2 & \underline{G}_{III}^2 & \underline{G}_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{p}}_2^2 \\ \underline{\tilde{p}}_{III}^2 \\ \underline{\tilde{p}}_I^2 \end{Bmatrix} + \underline{\tilde{b}}^2$$

Fig.III.7 - Região Ω_2



$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_3^3 & \tilde{H}_{II}^3 & \tilde{H}_{III}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_3^3 \\ \tilde{u}_{II}^3 \\ \tilde{u}_{III}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_3^3 & \tilde{G}_{II}^3 & \tilde{G}_{III}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_3^3 \\ \tilde{p}_{II}^3 \\ \tilde{p}_{III}^3 \end{Bmatrix} + \tilde{b}^3$$

Fig.III.8 - Região Ω_3

generalizando para uma região Ω_s :

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_s^s & \tilde{H}_1^s & \tilde{H}_2^s & \dots & \tilde{H}_q^s & \dots & \tilde{H}_{NI}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_s^s \\ \tilde{u}_1^s \\ \tilde{u}_2^s \\ \dots \\ \tilde{u}_q^s \\ \dots \\ \tilde{u}_{NI}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_s^s & \tilde{G}_1^s & \tilde{G}_2^s & \dots & \tilde{G}_{NI}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_s^s \\ \tilde{p}_1^s \\ \tilde{p}_2^s \\ \dots \\ \tilde{p}_q^s \\ \dots \\ \tilde{p}_{NI}^s \end{Bmatrix} + \tilde{b}^s$$

Para unir as subregiões, aplicam-se as condições de compatibilidade e de equilíbrio nas interfaces entre duas subregiões:

a) Condições de compatibilidade

$$\begin{aligned} \tilde{u}_I^1 &= \tilde{u}_I^2 = \tilde{u}_I \\ \tilde{u}_{II}^1 &= \tilde{u}_{II}^3 = \tilde{u}_{II} \\ \tilde{u}_{III}^2 &= \tilde{u}_{III}^3 = \tilde{u}_{III} \end{aligned}$$

generalizando: $\tilde{u}_q^s = \tilde{u}_q^t = \tilde{u}_q$, onde Γ_q é a interface entre as subregiões Ω_s e Ω_t .

b) Condições de equilíbrio

$$p_I^1 = - p_I^2 = p_I$$

$$p_{II}^1 = - p_{II}^3 = p_{II}$$

$$p_{III}^2 = - p_{III}^3 = p_{III}$$

generalizando: $p_q^s = - p_q^t = p_q$, onde Γ_q é a interface entre as subregiões Ω_s e Ω_t .

Pode-se, então, escrever o sistema de equações finais, salientado que estas submatrizes podem ser montadas adequadamente de várias maneiras, optando pela seguinte:

		CONTORNOS			INTERFACES						
		Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_I	Γ_{II}	Γ_{III}	Γ_I	Γ_{II}	Γ_{III}	
subregião	Ω_1	\tilde{H}_1^1		\sim	\tilde{H}^1	\tilde{H}_{II}^1	\sim	$-\tilde{G}_I^1$	$-\tilde{G}_{II}^1$	\sim	$\begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}^3 \\ \tilde{u}_I \\ \tilde{u}_{II} \\ \tilde{u}_{III} \\ \tilde{p}_I \\ \tilde{p}_{II} \\ \tilde{p}_{III} \end{pmatrix} =$
subregião	Ω_2	\sim	\tilde{H}_2^2	\sim	\tilde{H}_I^2	\sim	\tilde{H}_{III}^3	\tilde{G}_I^2	\sim	$-\tilde{G}_{III}^2$	
subregião	Ω_3	\sim	\sim	\tilde{H}_3^3	\sim	\tilde{H}_{II}^3	\tilde{H}_{III}^3	\sim	\tilde{G}_{II}^3	\tilde{G}_{III}^3	

		Γ_1	Γ_2	Γ_3			
subregião	Ω_1	\tilde{G}_1^1		\sim	$\begin{pmatrix} \tilde{p}^1 \\ \tilde{p}^2 \\ \tilde{p}^3 \end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix} \tilde{b}^1 \\ \tilde{b}^2 \\ \tilde{b}^3 \end{pmatrix}$
subregião	Ω_2	\sim	\tilde{G}_2^2	\sim			
subregião	Ω_3	\sim	\sim	\tilde{G}_3^3			

Generalizando:

CONTORNOS

INTERFACES

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	\dots	Γ_{NC}	Γ_1	Γ_2	Γ_3	\dots	Γ_{NI}	Γ_1	Γ_2	Γ_3	\dots	Γ_{NI}
subregião Ω_1	\tilde{H}_1^1				$\tilde{0}$										
subregião Ω_2	$\tilde{0}$	\tilde{H}_2^2			$\tilde{0}$										
subregião Ω_3	$\tilde{0}$		\tilde{H}_3^3		$\tilde{0}$			\tilde{H}					\tilde{G}		
\vdots															
subregião Ω_{NS}					$\tilde{0}$					\tilde{H}_{NS}^{NS}					

\tilde{u}_1^1	=	\tilde{G}_1^1	$\tilde{0}$	\tilde{p}_1^1	+	\tilde{b}_1^1
\tilde{u}_2^2				\tilde{p}_2^2		\tilde{b}_2^2
\tilde{u}_3^3				\tilde{p}_3^3		\tilde{b}_3^3
\vdots				\vdots		\vdots
\tilde{u}_{NC}				\tilde{p}_{NC}		
\tilde{u}_1		\tilde{G}_2^2	$\tilde{0}$			
\tilde{u}_2						
\tilde{u}_3		$\tilde{0}$	\tilde{G}_3^3	$\tilde{0}$		
\vdots						
\tilde{u}_{NI}						
\tilde{p}_1						
\tilde{p}_2						
\tilde{p}_3						
\vdots		$\tilde{0}$		\tilde{G}_{NS}^{NS}		\tilde{b}_{NS}^{NS}
\tilde{p}_{NI}						

CAPÍTULO IV

RECURSOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS

IV.1 - Considerações Gerais

O sistema foi desenvolvido na linguagem FORTRAN, em microcomputadores totalmente compatíveis com o IBM-PC ou IBM-PC XT, não se preocupando em explorar as capacidades dos equipamentos, para que ficasse independente da máquina, facilitando assim, sua implantação em outros equipamentos.

Dividiu-se em um número máximo de subrotinas, ficando estas com funções específicas, com a finalidade de facilitar sua lógica, permitindo uma visão global do que está ocorrendo, apenas pela análise do programa principal. Além disso, possibilitou testes separados de algumas subrotinas antes da montagem final do programa.

Sendo a limitação da capacidade de memória das instalações, um dos grandes problemas que normalmente ocorrem, optou-se pela utilização de vetor único real e vetor único inteiro, os quais possibilitaram a alocação dinâmica dos arrays, organizados apenas na memória principal. A divisão em três módulos executáveis também foi realizada, sendo a transferência de variáveis entre eles feita através da memória secundária.

A alocação dinâmica possibilitou um melhor aproveitamento de memória principal, liberando áreas quando estas passavam a não ser mais necessárias, ficando todos arrays utilizados

nas subrotinas com dimensionamentos ajustáveis, permitindo o dimensionamento da área de dados adequada a cada problema particular, evitando um aumento considerável dos módulos executáveis. A transferência a nível de compilação foi realizada apenas para as variáveis globais não indexadas e duas matrizes pequenas com dimensionamentos fixos.

Os três módulos executáveis podem ser executados independentes ou de maneira conjunta, sendo leitura e verificação de consistência de dados, processamento e impressão de relatórios, comentados a seguir.

IV.2 - Módulos Executáveis

IV.2.1 - Leitura e verificação de consistência de dados

Para leitura dos dados, elaborou-se um pré-processador iterativo com o usuário, lendo primeiramente os parâmetros básicos do tipo pergunta-resposta, calculando a memória necessária para armazenar os dados de entrada, que, não sendo suficiente o programa é encerrado. A seguir é feita então, a leitura dos dados através de menus, divididos em principal e vários secundários, a saber:

MENU PRINCIPAL	MENUS SECUNDÁRIOS
Dados do(s) contorno(s) e interface(s)	Coordenadas dos nós geométricos
	Incidências dos elementos
	Tipos dos elementos e códigos para as constantes geométricas
	Temperaturas e suas derivadas nos pontos nodais
Dados do(s) domínio(s)	
Dados estruturais	Constantes físicas
	Constantes geométricas
Dados das restrições nodais	Deslocamentos prescritos
	Forças de superfície prescritas
Dados de simetria	
Dados das subregiões	Elementos por contorno ou interface
	Interface por subregião
	Nós do domínio por subregião

Tabela IV.1 - Menus utilizados

Dentro dos menus secundários, encontram-se os comandos, que podem ser escolhidos pelo usuário, visando a melhor maneira de fornecimento dos dados, tais como nó a nó, elemento a elemento, bem como geração de coordenadas, incidências, tipos ou códigos, lista de elementos pertencentes ao contorno ou interface, etc. Em todas etapas são verificados a consistência dos dados, sendo os erros apontados no momento do fornecimento, tendo que ser corrigidos, para então continuar a leitura.

Após o fim da leitura dos dados, estes são armazenados na memória secundária.

IV.2.2 - Processamento

Para processar os dados, desenvolveu-se várias subrotinas, gerenciadas pelo programa principal, organizadas em etapas, sendo:

- Obtenção do número total de nós por contorno ou interface, calculando a seguir o número total de incógnitas.

- Cálculo da memória necessária para armazenar os dados e os resultados, sendo interrompida a execução, caso não for suficiente.

- Obtenção das abscissas e dos pesos para os pontos de Gauss.

- Cálculo dos comprimentos dos elementos.

- Obtenção da variável teste de localização de nó em relação ao ponto extremo, responsável pela decisão do nó pertencer ou não aos eixos de simetria, bem como ao elemento a ser integrado.

- Verificação final de erros dos dados fornecidos, tais como, deslocamento não pode ser prescrito, aceleração da gravidade (peso próprio) não pode ser fornecido, em uma determinada direção, dependendo do tipo de simetria; constantes geométricas incoerentes com o tipo do elemento; comprimento do elemento não pode ser nulo.

- Obtenção das coordenadas dos nós funcionais através das coordenadas dos pontos extremos (nós geométricos).
- Montagem da matriz dos coeficientes de influência mista da estrutura (\tilde{A}) e do vetor independente (\tilde{f}).
- Cálculo das incógnitas (deslocamentos e forças de superfície).
- Obtenção da matriz de incidências de elementos nos pontos nodais, necessária para o cálculo das tensões nos contornos e interfaces.
- Determinação dos deslocamentos e tensões nos pontos internos.
- Armazenamento dos dados e resultados na memória secundária.

Utilizou-se a integração numérica seletiva, em função da distância do ponto fonte ao ponto médio do elemento a ser integrado, podendo ter quatro diferentes pontos de Gauss, definidos pelo usuário, sendo todos pares menores do que 20.

Visando uma maior flexibilidade no fornecimento dos elementos, pertencentes aos contornos ou às interfaces, adotou-se um vetor contendo a lista dos elementos por contorno e interface, bem como um vetor contendo o número de elementos por contorno e interface. Da mesma maneira, criou-se, também, um vetor com a

lista dos contornos e interfaces pertencentes às subregiões e o vetor apontador com o número de contorno e interfaces por subregião.

Os arrays de incidências e coordenadas nodais foram elaborados para serem acessados diretamente, evitando a busca, o que certamente, aumentaria o tempo de processamento.

Foi utilizado também um vetor contendo os nós, armazenados na medida em que a matriz dos coeficientes de influência \underline{A} foi sendo montada, dependendo da ordem em que estiverem armazenados os elementos no vetor mencionado anteriormente.

Para economizar memória principal, as matrizes dos coeficientes de influência dos elementos foram armazenadas diretamente na matriz \underline{A} e no vetor independente \underline{f} , já sendo introduzidos as condições de contorno, evitando assim, a formação das matrizes \underline{H} e \underline{G} . As forças de volume, por não introduzirem nenhuma incógnita, foram somadas diretamente no vetor \underline{f} .

Para evitar o mau condicionamento da matriz \underline{G} , multiplicou-se pelo maior Módulo de Elasticidade Longitudinal (E) entre as regiões diferentes analisadas.

Quando o problema apresenta mais de uma região diferente, a matriz \underline{A} torna-se mal condicionada, pelo fato de alguns dos coeficientes obtidos pelo movimento de corpo rígido serem colocados fora da diagonal principal, os quais geralmente são os maiores coeficientes em valor absoluto das colunas. Para evitar is-

to, introduziu-se, na subrotina que resolve o sistema de equações, o artifício de procurar, em cada coluna, o maior coeficiente, tomando este como o pivô.

IV.2.3 - Impressão do relatório

Este módulo tem a finalidade de ler os dados e resultados na memória secundária, calcular as tensões nos pontos nodais funcionais pertencentes aos contornos e interfaces, e os imprimir, podendo o usuário escolher a forma de impressão, entre, vídeo, impressora ou memória secundária.

Foi elaborado de tal maneira a facilitar interfaces com outros programas.

Primeiramente são impressos todos os dados de entrada, a seguir os resultados por subregião, finalmente os tempos utilizados na análise, como montagem da matriz A e o vetor f , resolução do sistema de equações e o cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

V.1 - Introdução

Para testar o programa elaborado, no qual foram implementadas as teorias, bem como as técnicas computacionais, descritas nos capítulos anteriores, analisaram-se várias estruturas no regime de elasticidade linear bidimensional, utilizando microcomputadores de 16 bits compatíveis com IBM-PC, contendo coprocessadores numéricos e clock de 8 MHz.

Procurou-se comparar com as soluções analíticas adequadas os deslocamentos e tensões nos pontos internos selecionados, pelo fato destes serem calculados a partir dos deslocamentos e forças de superfícies de todos os pontos nodais do contorno, e interfaces (quando se utiliza mais de uma região) ficando portanto, verificado estes resultados.

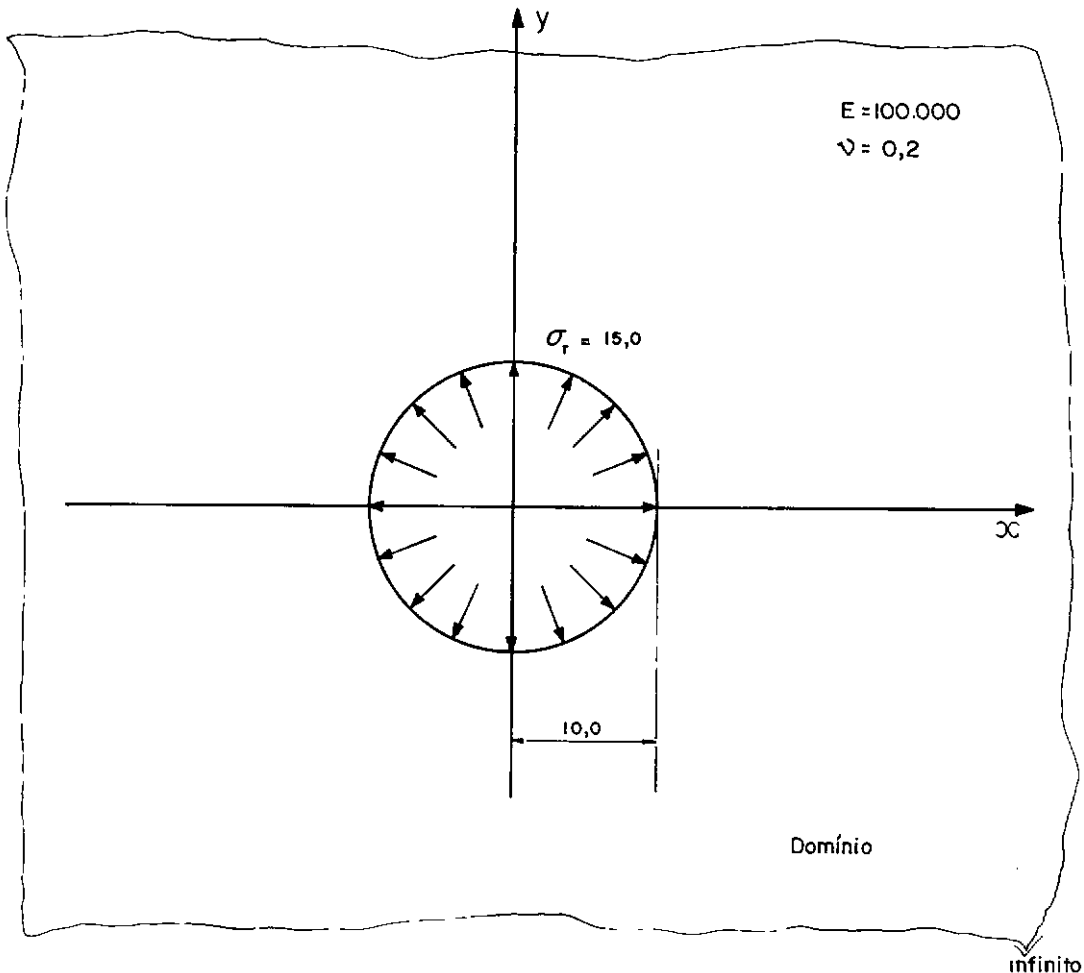
Foram apresentados os tempos gastos na montagem da matriz dos coeficientes de influência mista e vetor independente (MAF), na resolução do sistema de equações (RSE) e na determinação dos deslocamentos e tensões nos pontos internos (DTPI) em alguns exemplos.

As incidências dos pontos nodais nos elementos pertencentes às interfaces foram fornecidas, levando em consideração que, partindo do nó inicial para chegar ao nó final, o domínio da região de menor número deve permanecer à esquerda.

Em todos os exemplos não foram indicadas as unidades, tendo em vista apenas a finalidade de comparação com soluções analíticas, não se preocupando em obter resultados práticos.

V.2 - Cavidade Cilíndrica

Como primeiro exemplo foi analisada uma cavidade cilíndrica, submetida a pressão interna de 15, cujo raio é igual a 10, sendo o meio infinito constituído de material com $E = 100.000$ e $\nu = 0,2$. A figura a seguir mostra o problema estudado no estado plano de deformação, como também a definição dos eixos.



Na análise foi utilizado apenas um quarto da estrutura, aproveitando a simetria em relação aos eixos x e y.

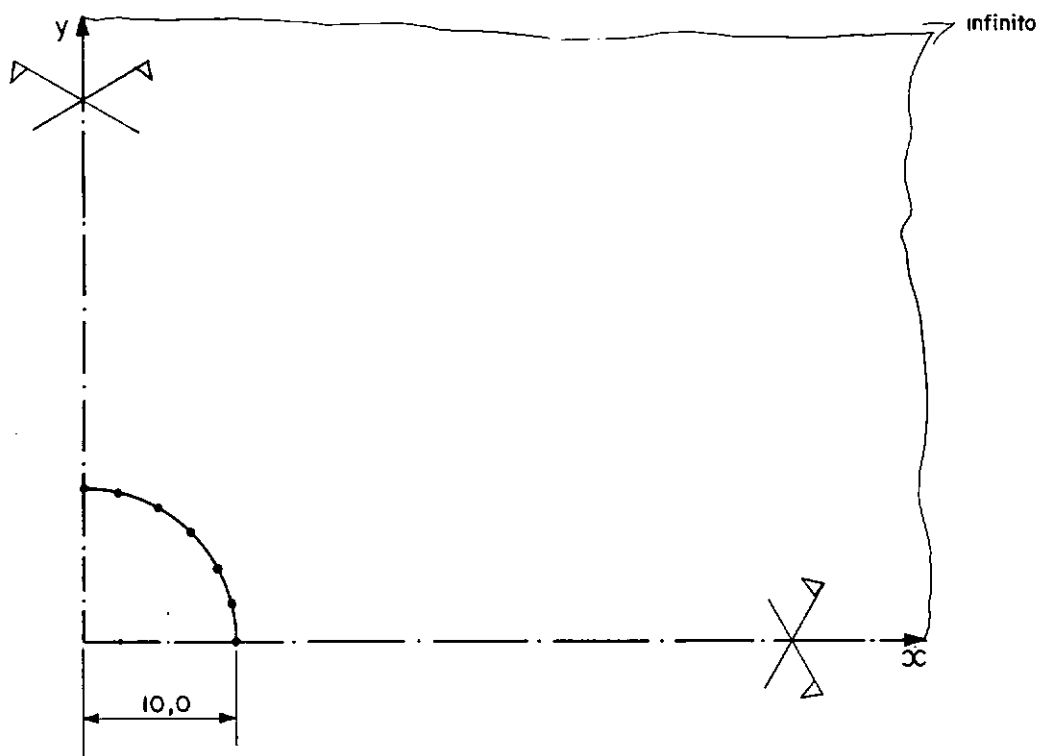
Foram realizadas duas discretizações diferentes (Figura (V.2)). Na primeira dividiu-se o contorno em 6 elementos do mesmo comprimento. Na segunda introduziu-se uma interface, separando o domínio em 2 regiões com as mesmas características físicas, com o objetivo de observar a sua influência nos resultados. Para isto a interface foi dividida em 6 elementos com o mesmo comprimento, usando elementos descontínuos para aqueles em que o nó geométrico pertence ao eixo de simetria.

A condição de contorno já está embutida na simetria, visto que os nós pertencentes aos eixos de simetria têm seus deslocamentos na direção perpendicular nulos.

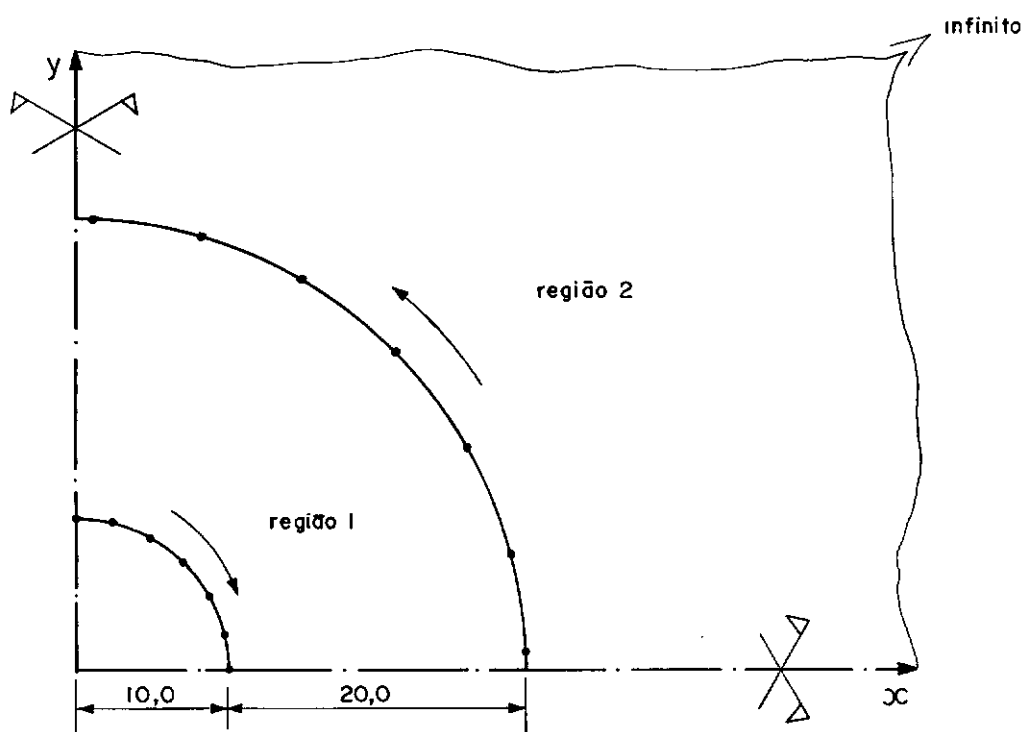
Para as coordenadas dos nós pertencentes ao contorno, adotou-se duas maneiras para o fornecimento das mesmas, usando o polígono inscrito e o artifício do polígono com a área equivalente ao círculo da cavidade, sendo as constantes fornecidas pelas seguintes expressões, válidas apenas para um quarto do círculo:

$$a = \frac{r}{2} \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{n^2 \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4n} \right) \right] \sin^2 \left(\frac{\pi}{4n} \right)}} \quad (V.1)$$

$$b = 2 a \sin \left(\frac{\pi}{4n} \right)$$



(a) 6 elementos (1 região)



(b) 12 elementos (2 regiões)

Fig.V.2 - Discretizações do problema

onde r é o raio do círculo, n o número de triângulos contidos no quarto do polígono, a e b mostrados na seguinte figura

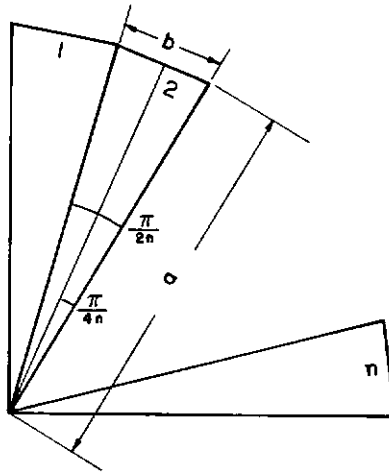


Fig.V.3 - Um quarto do polígono equivalente

Substituindo os valores $r=10$ e $n=6$ na Expressão (V.1) obtem-se:

$$a = 10,05741$$

$$b = 2,62551$$

Nas Tabelas (V.1) e (V.2) estão listadas as tensões σ_x e σ_y obtidas nos pontos nodais ao longo do eixo de simetria x e a solução analítica fornecida por TIMOSHENKO e GOODIER [12].

y = 0 Coordenada x	$\sigma_x = -\sigma_y$ Solução Analítica σ_y	Discretização a		Discretização b	
		σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
10,0	15,000	-14,875	14,701	-14,875	14,672
12,0	10,417	-10,200	10,191	-10,204	10,167
14,0	7,653	- 7,475	7,474	- 7,478	7,453
16,0	5,859	- 5,722	5,722	- 5,725	5,701
20,0	3,750	- 3,662	3,662	- 3,662	3,641
30,0	1,667	- 1,628	1,628	- 1,623	1,614
50,0	0,600	- 0,586	0,586	- 0,585	0,584

Tab.V.1 - Tensões ao longo do eixo de simetria x, considerando o polígono inscrito

y = 0 Coordenada x	$\sigma_x = -\sigma_y$ Solução Analítica σ_y	Discretização a		Discretização b	
		σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
10,0	15,000	-14,875	14,701	-14,875	14,671
12,0	10,417	-10,321	10,310	-10,324	10,286
14,0	7,653	- 7,561	7,560	- 7,565	7,538
16,0	5,859	- 5,788	5,788	- 5,791	5,767
20,0	3,750	- 3,704	3,704	- 3,704	3,683
30,0	1,667	- 1,646	1,646	- 1,642	1,632
50,0	0,600	- 0,593	0,593	- 0,592	0,590

Tab.V.2 - Tensões ao longo do eixo de simetria x, considerando o polígono equivalente

Comparando as duas tabelas nota-se um melhor comportamento para as tensões quando se utiliza o artifício do polígono equivalente. Quanto às duas discretizações, a introdução de mais uma região não influenciou muito nas tensões, pois os resultados estão bem próximos, tendo uma ligeira superioridade para a discretização (a).

V.3 - Viga Longa Uniformemente Carregada

A viga longa é caracterizada por seu comprimento ser bem superior a sua altura. Desta maneira a teoria elementar da flexão de vigas proporciona resultados com boas aproximações para os deslocamentos e tensões.

Seja analisar a viga de seção retangular delgada e de largura unitária, apoiada nas extremidades e submetida à flexão sob uma carga uniformemente distribuída de intensidade um, como mostra a Figura (V.4), para qual foram realizadas 3 discretizações diferentes, considerando somente metade do domínio, aproveitando a simetria em relação ao eixo y .

Como a viga é esbelta, utilizou-se várias regiões, com as mesmas constantes físicas ($E = 200.000$; $\nu = 0,40$), com a finalidade de observar a influência das interfaces sobre o modelo analisado.

As discretizações estão apresentadas na Figura (V.5), sendo utilizados 44 elementos e uma região para a primeira, 48 elementos e duas regiões para a segunda e 52 elementos e três re

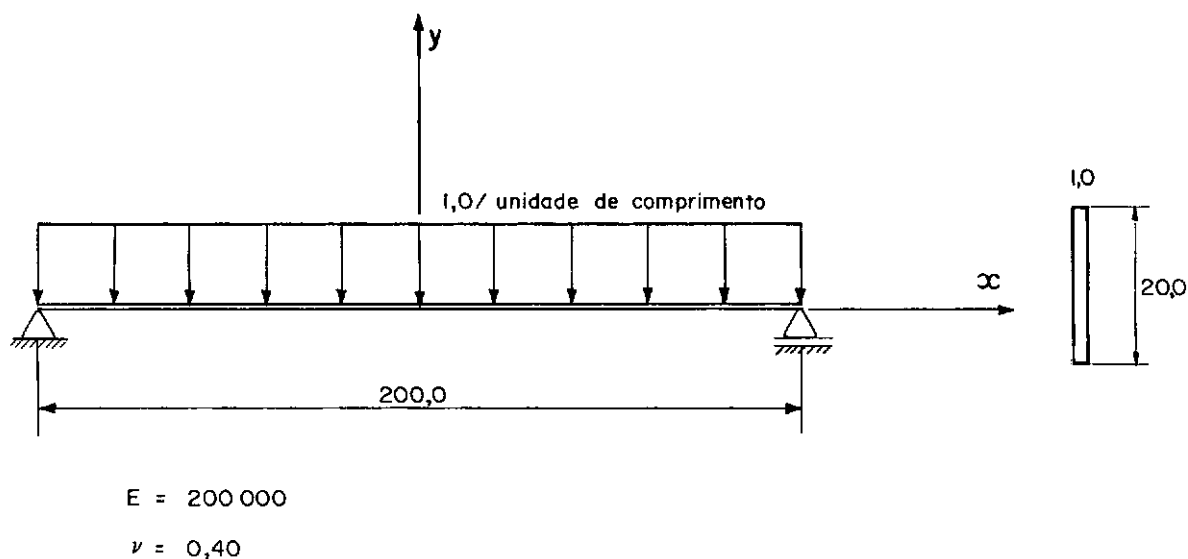


Fig.V.4 - Definição da viga longa

giões para a terceira, apoiando a viga em todos nós da seção onde $x = 100,0$, na direção y . Pelo fato de se utilizar elementos lineares, as discretizações foram bem refinadas, visto que o campo de deslocamentos são governados por polinômio de quarta ordem.

Para os elementos cujos nós pertencem ao contorno e interface foram usados elementos de transição.

O deslocamento na direção y pode ser visto em qualquer livro de Resistência dos Materiais, sendo obtidos para pontos internos ao longo do eixo x , indicados na Tabela (V.3).

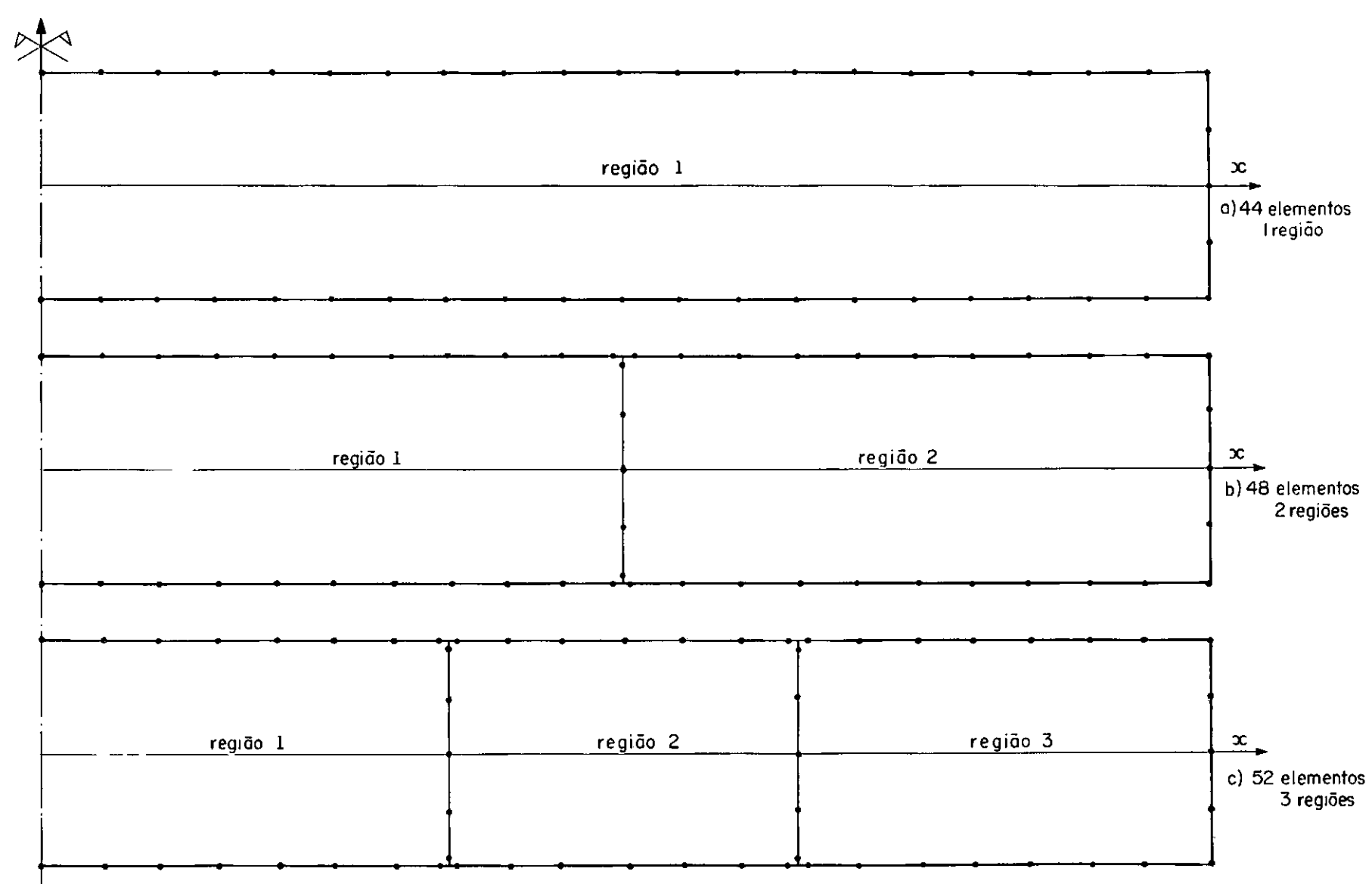


Fig.V.5 - Discretizações da metade da viga

y = 0 Coordenada x	Teoria de Viga	Discretizações		
		a	b	c
80,0	0,04905	0,04759	0,05008	0,05152
70,0	0,07188	0,06964	0,07332	0,07545
60,0	0,09280	0,08980	0,09460	0,09734
50,0	0,11133	0,10762	0,11344	0,11668
40,0	0,12705	0,12271	0,12931	0,13311
30,0	0,13963	0,13477	0,14197	0,14620
20,0	0,14880	0,14356	0,15120	0,15568
10,0	0,15438	0,14890	0,15680	0,16144
0,0	0,15625	0,15069	0,15868	0,16337

Tab.V.3 - Deslocamentos ao longo do eixo x na direção y

Outro resultado analisado foi a variação das tensões normais na seção transversal média da viga ($x = 0$), indicados na Tabela (V.4).

x = 0 Coordenada y	Teoria de Viga	Discretizações		
		a	b	c
10,0	- 75,0	- 70,543	- 74,048	- 76,168
7,5	- 56,25	- 52,501	- 55,117	- 56,698
5,0	- 37,50	- 35,087	- 36,837	- 37,897
2,5	- 18,75	- 17,535	- 18,410	- 18,941
0,0	0,00	0,002	0,002	0,002
- 2,5	18,75	17,532	18,407	18,938
- 5,0	37,50	35,084	36,834	37,894
- 7,5	56,25	52,498	55,113	56,694
- 10,0	75,00	70,540	74,045	76,165

Tab.V.4 - Tensões σ_x ao longo da seção transversal média

Pelas Tabelas (V.3) e (V.4) constata-se que a medida que aumenta-se o número das regiões, tanto os deslocamentos quanto as tensões tende para valores sempre maiores, sendo que para todos os pontos o comportamento foi bom.

Foi rodado também a viga com uma região com a discretização no eixo de simetria e observou-se o mesmo comportamento, ou seja, os resultados tiveram seus valores maiores.

Os tempos gastos na análise estão listados na tabela a seguir

Etapas Executadas	Tempos (seg.)		
	Discretização a	Discretização b	Discretização c
MAF	544,81	426,44	413,70
RSE	364,21	601,71	934,73
DTPI	477,14	300,22	254,68
Total	1.386,16	1.328,37	1.603,11

Tab.V.5 - Tempos gastos

É interessante observar que o tempo gasto para MAF e DTPI vai decrescendo a medida que aumenta o número de regiões, visto que o ponto fonte varia nos contornos e interfaces pertencentes apenas às regiões onde se encontram, não precisando, portanto, varrer todo o contorno. O tempo gasto para resolução do sistema ocorre o inverso, mesmo porque a dimensão da matriz \underline{A} é maior na ordem das discretizações. Cabe salientar que não foi implementado nenhum artifício para sua montagem, como também para a resolução do sistema de equações.

V.4 - Chapa Tractionada com Orifício Circular

Foi analisado neste exemplo, o efeito de um orifício circular na distribuição de tensões na chapa quadrada submetida a uma tração uniforme na direção x, mostrada na Figura (V.6).

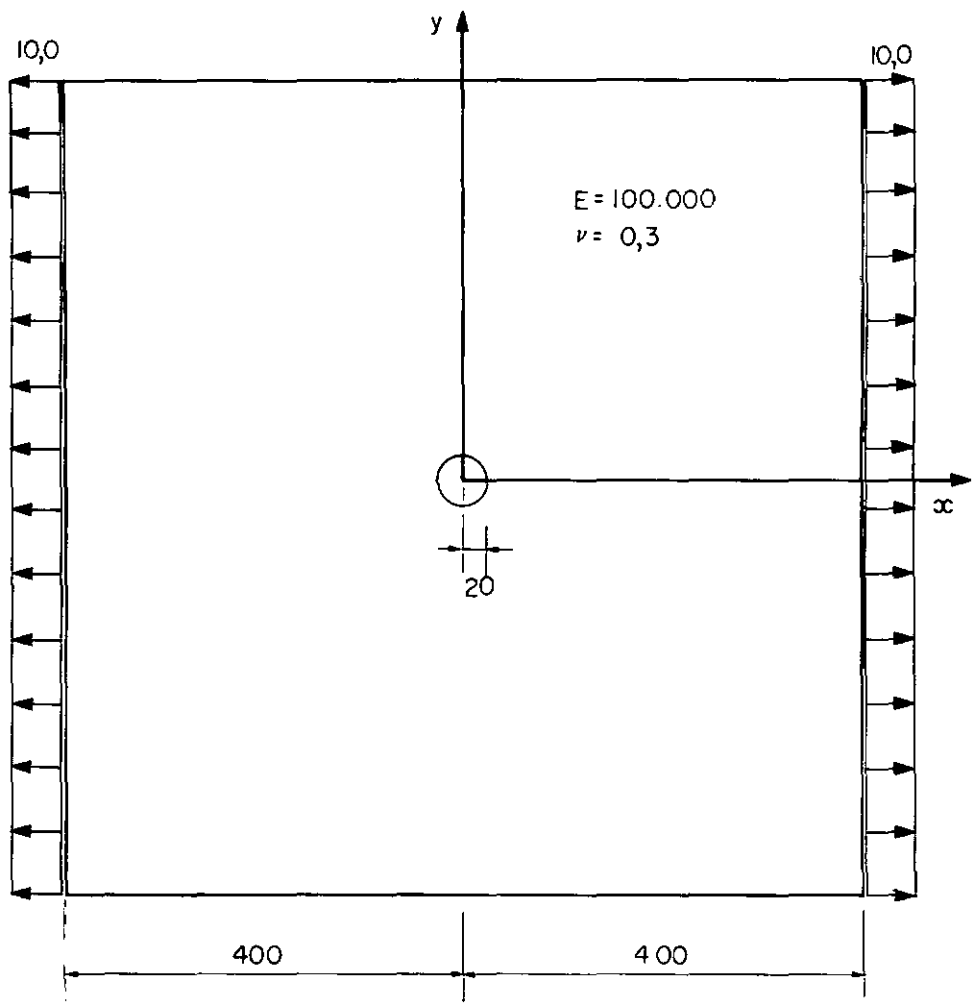


Fig.V.6 - Chapa tracionada com orifício circular

As constantes físicas usadas foram $E = 100.000$ e $\nu = 0,30$, sendo a tensão igual a 10,0.

Para discretizações do contorno, considerou-se a simetria da geometria da estrutura, bem como do carregamento, em relação aos dois eixos, as quais são apresentadas na Figura (V.7), sem escala.

Cabe salientar aqui que a simetria já está embutida no programa, não precisando portanto, discretizar e impor as condições de contorno apropriadas nos eixos de simetria.

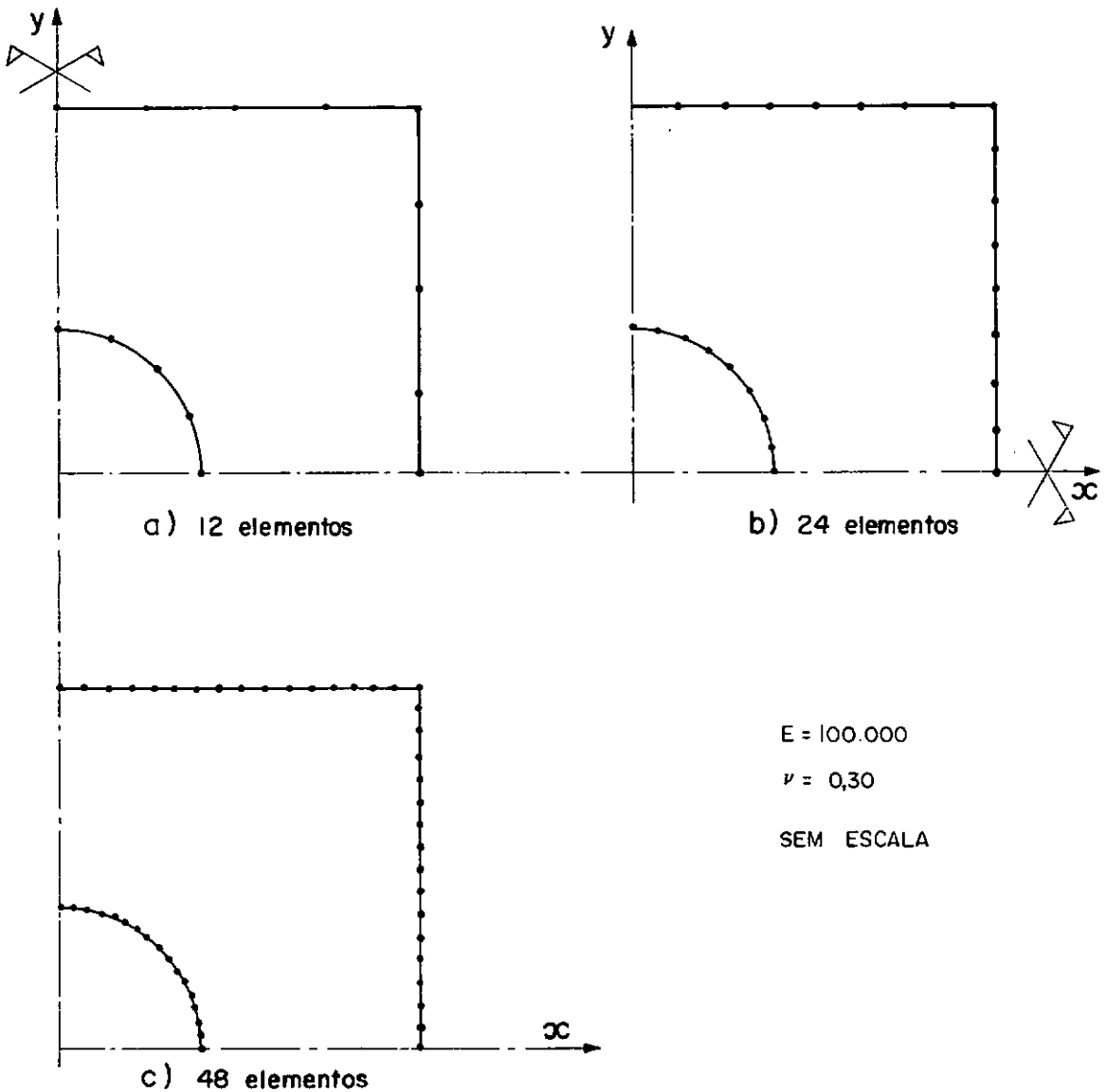


Fig.V.7 - Discretizações da chapa tracionada com orifício

A solução exata para as tensões, em termos de coordenadas polares, são escritas como [12, 27]:

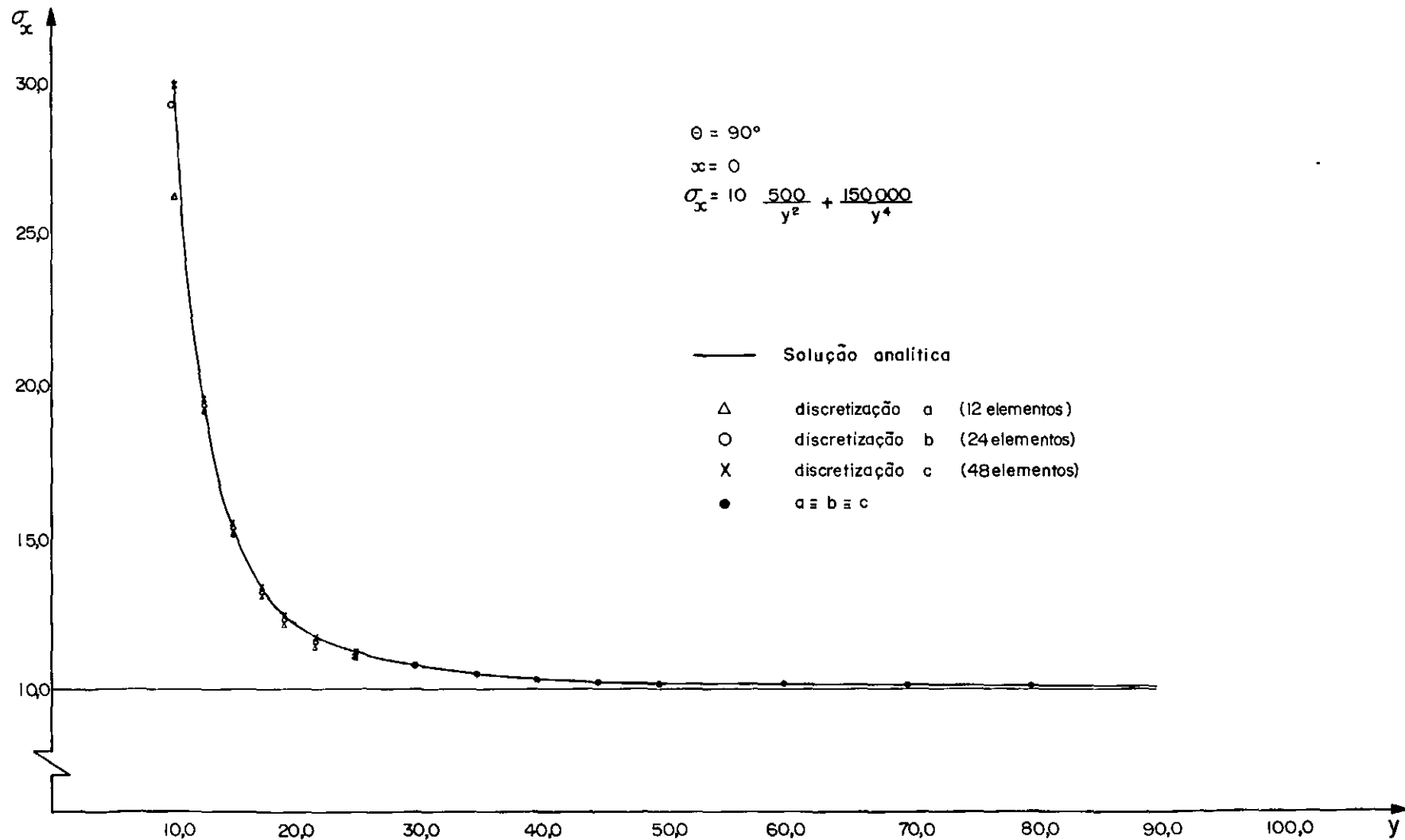
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (V.2)$$

onde S é a tensão de tração, a o raio do orifício, r e θ dados como:

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 \\ \theta &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right)\end{aligned}\quad (V.3)$$

Para comparação com os resultados obtidos determinou-se as tensões normais σ_x nos pontos ao longo do eixo de simetria y , apresentadas no Gráfico (V.1).

O comportamento das tensões foi muito bom, com a convergência por baixo para pontos próximos do orifício, melhorando para as três discretizações a medida em que se afasta do mesmo, chegando a praticamente coincidir com a solução analítica, como pode ser constatado no Gráfico (V.1).



Gráf.V.1 - Tensão normal σ_x ao longo do eixo de simetria y

Os tempos gastos para a análise estão apresentados na Tabela (V.6).

Etapas Executadas	Tempos (seg.)		
	Discretização a	Discretização b	Discretização c
MAF	104,09	331,42	1.210,73
RSE	36,47	109,74	439,02
DTPI	292,26	472,09	922,64
Total	432,82	913,25	2.572,39

Tab.V.6 - Tempos gastos

V.5 - Chapa Submetida à Tração e ao Peso Próprio

Neste exemplo considera-se uma chapa retangular apoiada no bordo $x = 0$, submetida a um carregamento uniformemente distribuído no bordo $x = 6$, considerando o peso próprio, como mostra a Figura (V.8).

A chapa foi analisada no estado plano de tensão com $E = 100.000$, $\nu = 0,3$, massa por unidade de volume de 10,0 e aceleração de gravidade de 9,8.

Empregou-se o artifício da simetria em relação ao eixo x , analisando apenas a metade da chapa, apoiando todos pontos nodais situados no eixo y , na direção x , não sendo necessário apoiar na outra direção, visto que já está embutido no programa os des-

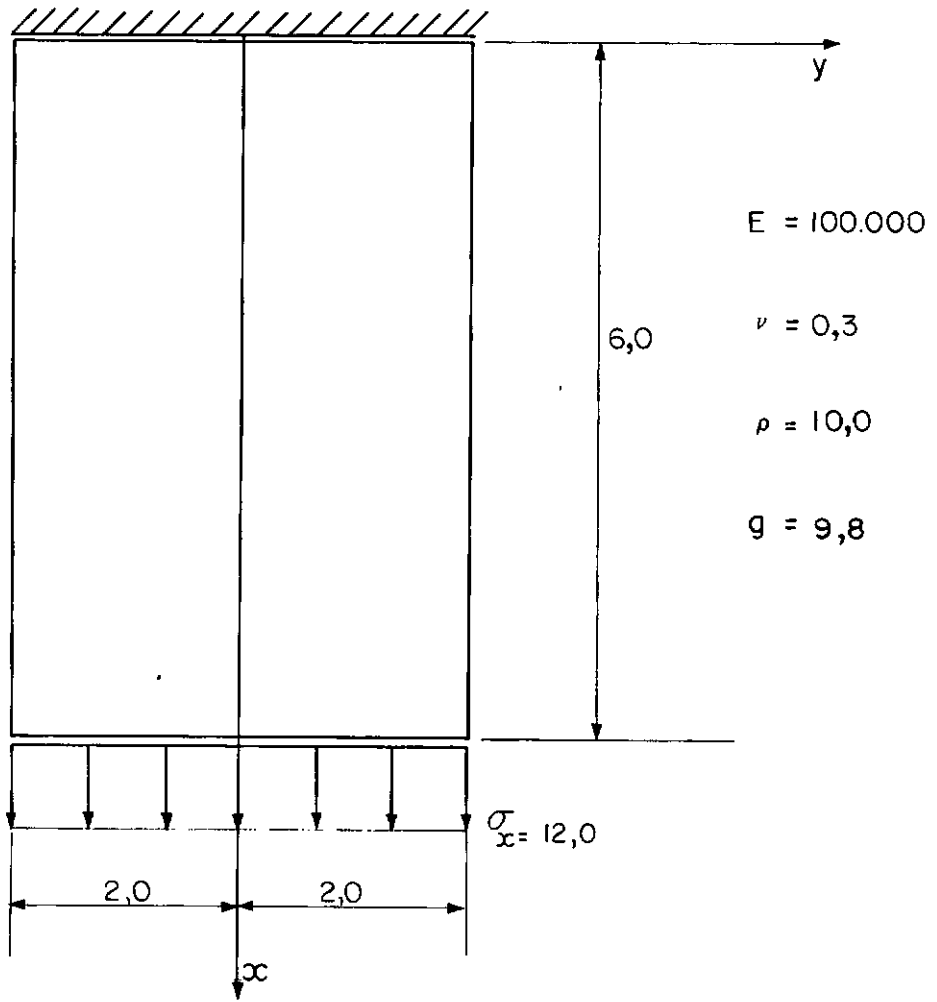
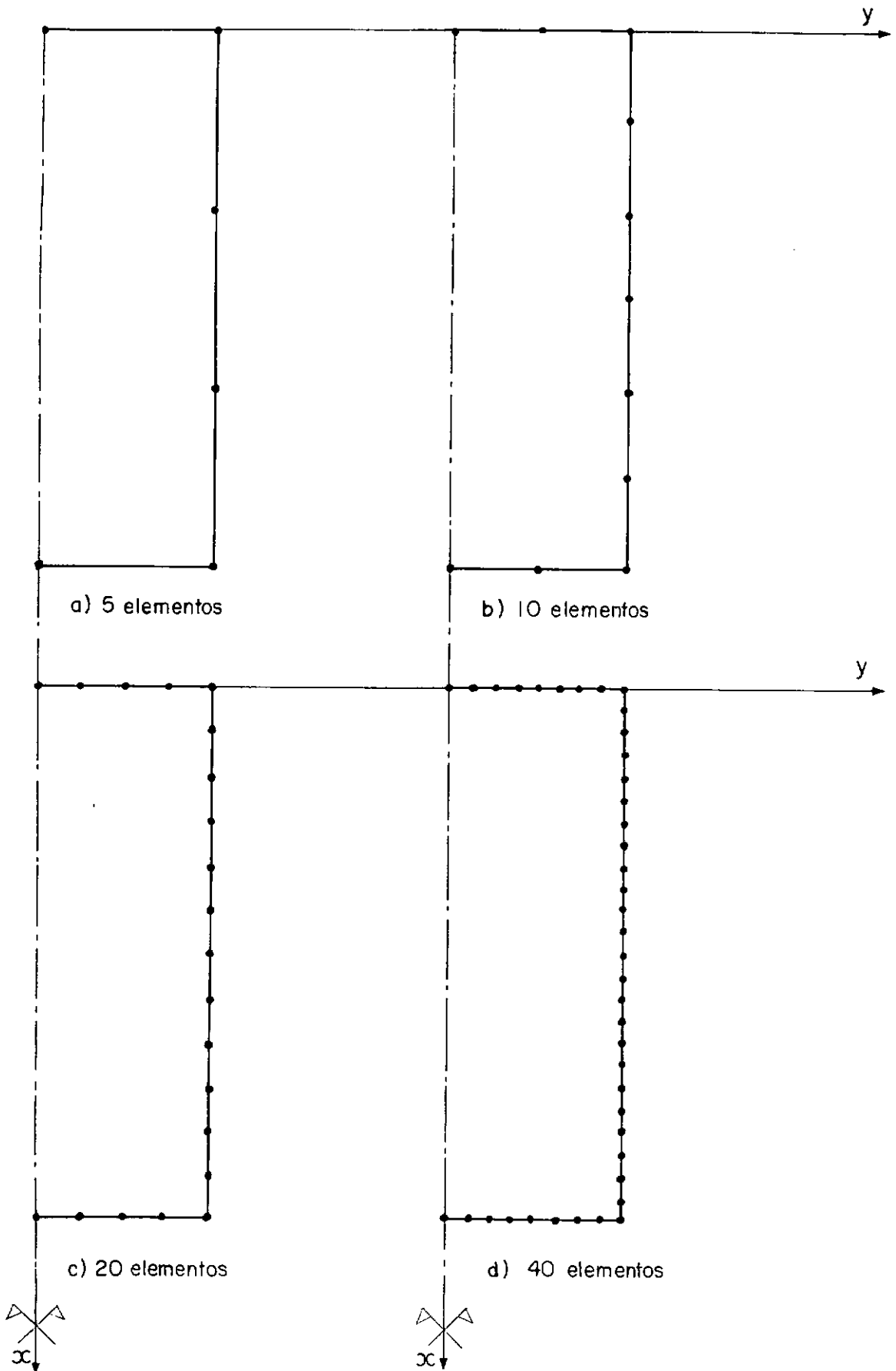


Fig.V.8 - Definição da chapa

locamentos nulos na direção y para nós pertencentes ao eixo de simetria x .

Foram feitas quatro discretizações para estudar a convergência dos deslocamentos, apresentadas na Figura (V.9), utilizando 5, 10, 20 e 40 elementos, todos contínuos, colocando nó duplo para os elementos de canto.



F. 9.9 - Discretização da chapa

Segundo UGURAL e FENSTER [27] para este problema, desprezando a variação da solução na direção z , os deslocamentos nas direções x e y são expressos como:

$$u = \frac{\rho g}{2E} (2x\ell - x^2 - \nu y^2) + \frac{\rho x}{E} \quad (V.4)$$

$$v = - \frac{\rho g \nu}{E} (\ell - x) y$$

Na Tabela (V.7) estão apresentados os deslocamentos u para pontos localizados ao longo do eixo de simetria x .

Na Tabela (V.8), os deslocamentos v ao longo de um eixo horizontal com abscissa de 3,0 estão listados.

Observa-se pelas Tabelas (V.7) e (V.8) que todos nós convergiram de forma excelente, sendo apresentados a seguir três gráficos de convergência para nós selecionados.

Os pontos de 3 a 8, 15, 16 e 17 apresentaram convergência semelhante ao ponto 2, enquanto que os pontos 9, 11 e 12 já tiveram suas convergências parecidas com o ponto 10. Somente o ponto 18 convergiu de uma forma semelhante ao 13.

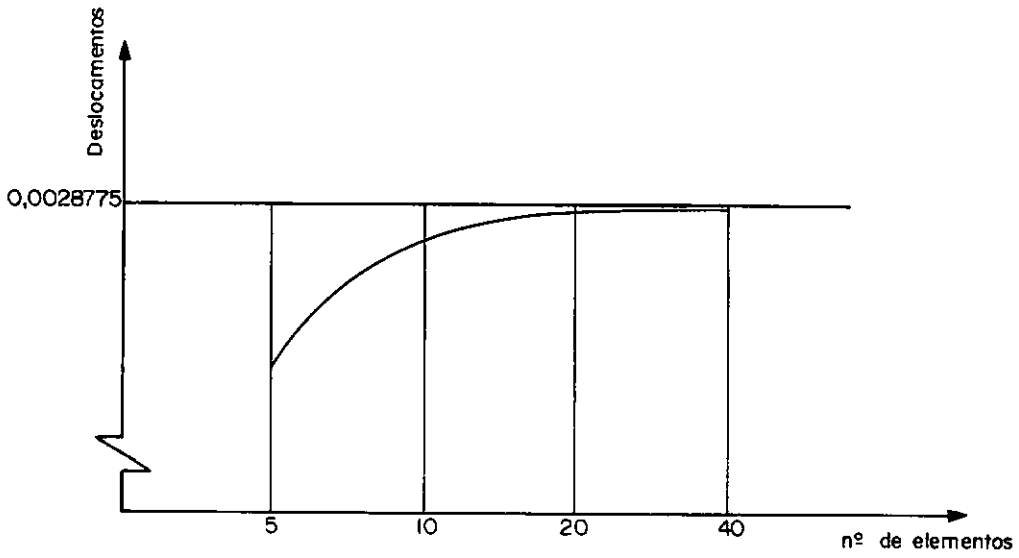
Os tempos gastos na análise estão indicados na Tabela (V.9).

Pontos	Y = 0	UGURAL e FENSTER	Discretizações			
	Coordenada		a	b	c	d
	x		5 elementos	10 elementos	20 elementos	40 elementos
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	0,5	0,0028775	0,0028341	0,0028689	0,0028752	0,0028769
3	1,0	0,0055100	0,0054517	0,0055010	0,0055081	0,0055096
4	1,5	0,0078975	0,0078310	0,0078882	0,0078958	0,0078972
5	2,0	0,0100400	0,0099698	0,0100306	0,0100385	0,0100397
6	2,5	0,0119375	0,0118689	0,0119285	0,0119363	0,0119373
7	3,0	0,0135900	0,0135254	0,0135819	0,0135892	0,0135900
8	3,5	0,0149975	0,0149364	0,0149907	0,0149972	0,0149976
9	4,0	0,0161600	0,0161033	0,0161547	0,0161602	0,0161602
10	4,5	0,0170775	0,0170276	0,0170733	0,0170781	0,0170779
11	5,0	0,0177500	0,0177067	0,0177465	0,0177510	0,0177506
12	5,5	0,0181775	0,0181404	0,0181753	0,0181789	0,0181782
13	6,0	0,0183600	0,0183437	0,0183699	0,0183649	0,0183616

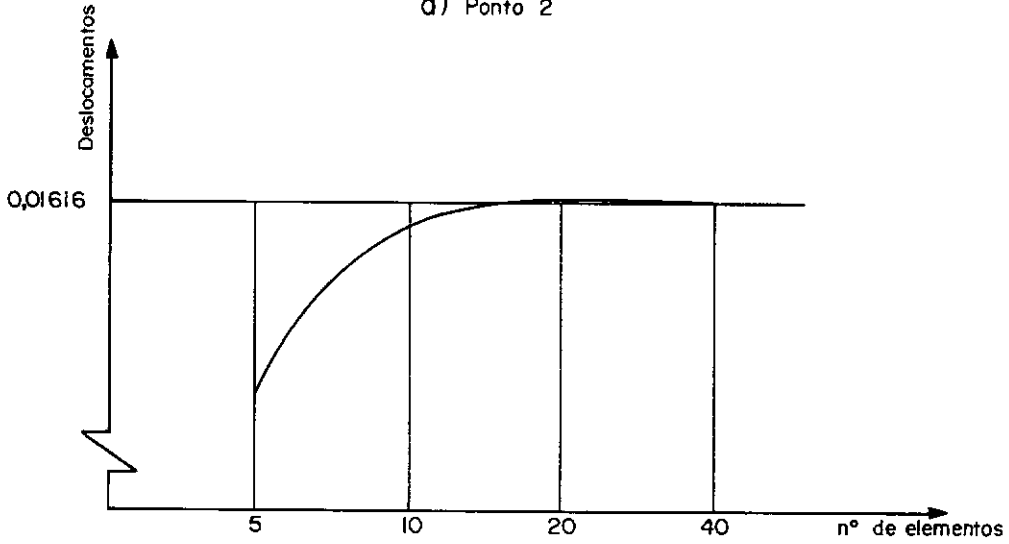
Tab.V.7 - Deslocamentos u ao longo do eixo de simetria x

Pontos	x = 0	UGURAL e FENSTER	Discretizações			
			a	b	c	d
	Coordenada y		5 elementos	10 elementos	20 elementos	40 elementos
14	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	0,5	- 0,000459	- 0,0004566	- 0,0004584	- 0,0004590	- 0,0004590
16	1,0	- 0,000918	- 0,0009143	- 0,0009172	- 0,0009180	- 0,0009180
17	1,5	- 0,001377	- 0,0013739	- 0,0013765	- 0,0013771	- 0,0013771
18	2,0	- 0,001836	- 0,0018346	- 0,0018363	- 0,0018363	- 0,0018361

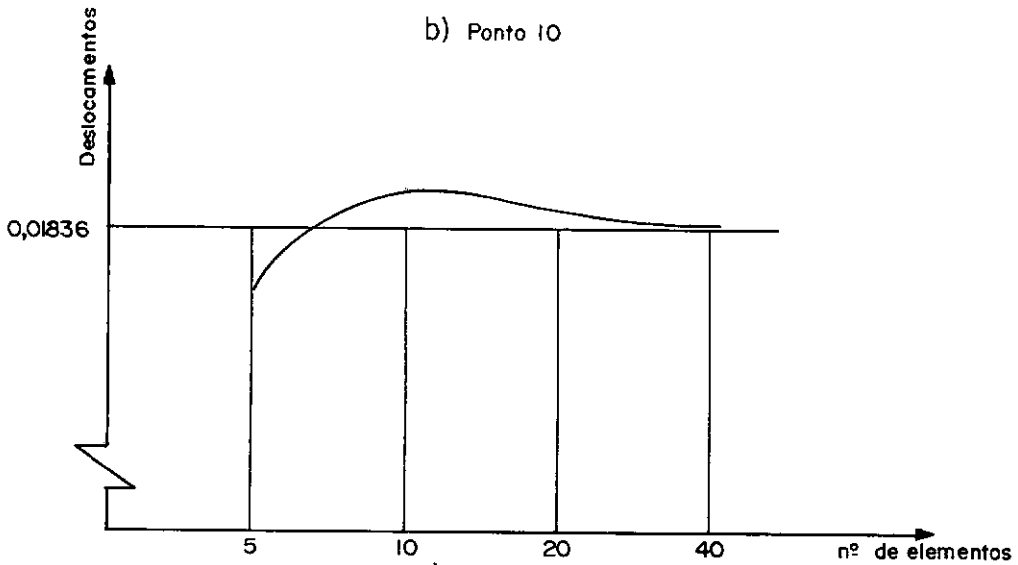
Tab.V.8 - Deslocamentos v ao longo do eixo horizontal com abscissa 3,0



a) Ponto 2



b) Ponto 10



c) Ponto 13

Etapas Executadas	Tempos (seg.)			
	Discret. a	Discret. b	Discret. c	Discret. d
MAF	24,88	61,35	167,30	557,33
RSE	14,34	27,85	77,56	290,44
DTPI	104,85	158,19	212,95	324,89
Total	144,07	247,39	457,81	1.172,66

Tab.V.9 - Tempos gastos

V.6 - Disco Giratório

Seja analisar um disco maciço, sem forças aplicadas no bordo, girando em torno de um eixo perpendicular ao seu plano. Para este caso TIMOSHENKO e GOODIER [12] fornecem as seguintes expressões para deslocamentos e tensões:

$$u = \frac{\rho w^2}{8E} \left[(3 - 2\nu - \nu^2) b^2 r - (1 - \nu^2) r^3 \right]$$

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho w^2 (b^2 - r^2) \quad (V.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3 + \nu}{8} \rho w^2 b^2 - \frac{1 + 3\nu}{8} \rho w^2 r^2$$

onde ρ é a massa por unidade do material do disco, w a velocidade angular e b o raio do disco.

As constantes físicas e geométricas utilizadas no problema, bem como a definição dos eixos estão apresentados na Figura (V.10).

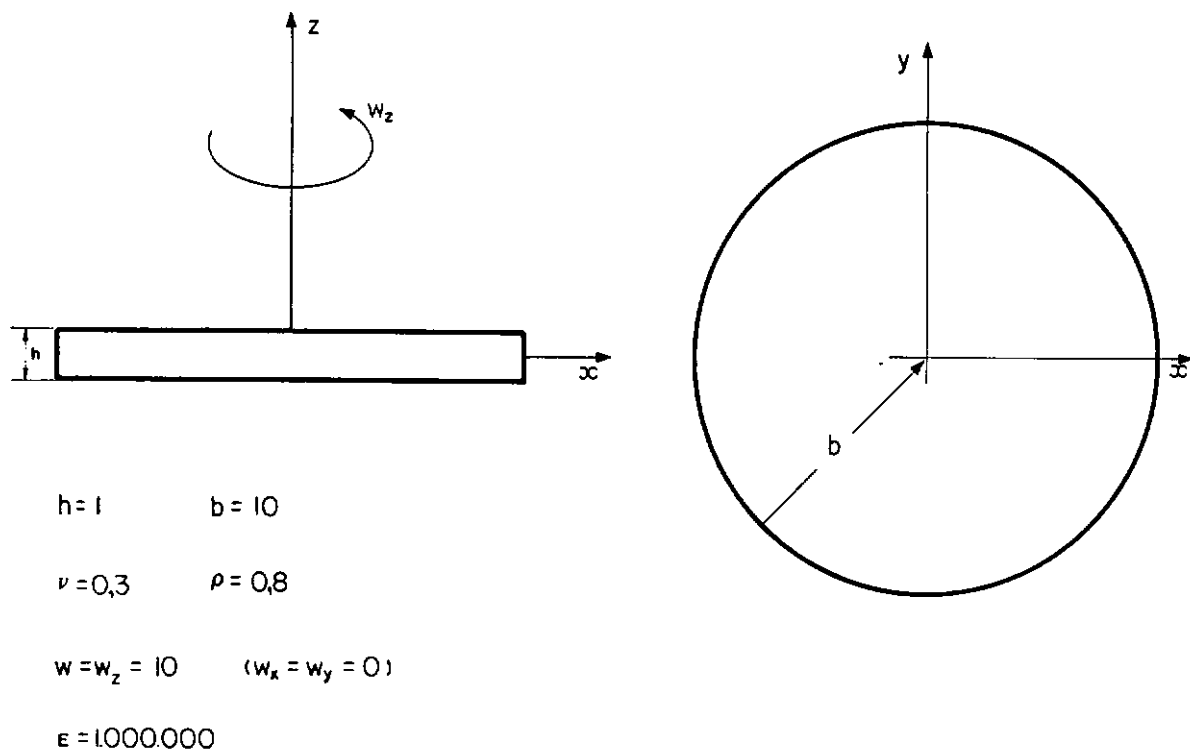


Fig.V.10 - Definição do disco

Com a finalidade de observar a convergência dos resultados, discretizou-se o contorno do disco em 4, 8 e 16 elementos, com o mesmo comprimento, conforme ilustrado na Figura (V.11), utilizando apenas um quarto do mesmo.

Para o fornecimento das coordenadas dos pontos nodais adotou-se o polígono inscrito e o polígono equivalente, comentado no item (V.2).

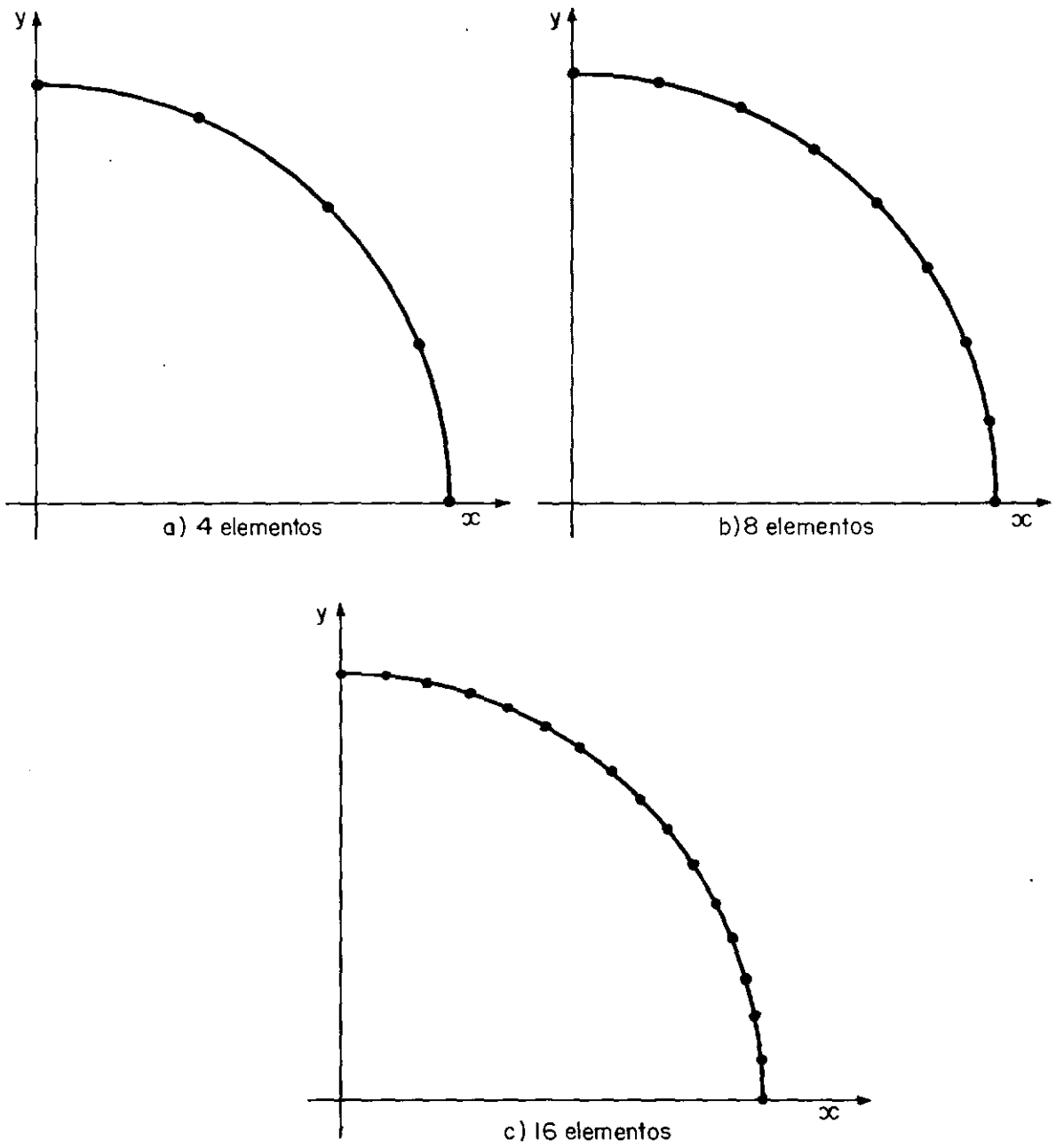


Fig.V.11 - Discretizações do contorno

Substituindo os valores de n na Expressão (V.2) tem-se a seguinte tabela:

n	a	b
4	10,13001556	3,952535996
8	10,03222081	1,966659189
16	10,00803772	0,9821422705

Tab.V.10 - Constantes geométricas do polígono equivalente

Foram obtidos deslocamentos e tensões ao longo da bissetriz do ângulo formado entre os eixos x e y, para os dois casos, ou seja, utilizando para discretização o polígono inscrito e o polígono equivalente, indicados nas tabelas a seguir.

Cabe salientar que as Tabelas (V.15), (V.16), (V.17) e (V.18) foram calculadas a partir das Tabelas (V.13) e (V.14) usando a matriz de transformação para tensor de 2^a ordem.

A convergência para os nós pertencentes ao contorno, onde o deslocamento radial é de 0,014 é apresentado no Gráfico (V.3), para os dois casos.

Nota-se que todos os deslocamentos e tensões tiveram a convergência começando com valores abaixo da solução analítica, a menos dos deslocamentos nos pontos nodais do contorno, usando o polígono equivalente. Os resultados apresentaram comportamento bem próximo da solução para discretização mais refinada, principalmente quando se utilizou o polígono equivalente.

Coordenadas			Deslocamentos direção x e y			Deslocamentos direção radial			Solução Analítica Direção Radial
x	y	r	Discretização (a)	Discretização (b)	Discretização (c)	Discretiz. (a)	Discretiz. (b)	Discretiz. (c)	
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,0	1,0	1,41421	0,002229628	0,002275796	0,002287745	0,0031532	0,0032185	0,0032354	0,0032411
2,0	2,0	2,82843	0,004350056	0,004442391	0,004466291	0,0061519	0,0062825	0,0063163	0,0063278
3,0	3,0	4,24264	0,006252084	0,006390587	0,006426436	0,0088418	0,0090377	0,0090884	0,0091056
4,0	4,0	5,65685	0,007826541	0,008011183	0,008058981	0,0110684	0,0113295	0,0113971	0,0114201
5,0	5,0	7,07107	0,008964872	0,009194980	0,009254727	0,0126782	0,0130037	0,0130882	0,0131168
6,0	6,0	8,48528	0,009565357	0,009832920	0,009904472	0,0135275	0,0139058	0,0140070	0,0140414
7,07107	7,07107	10,0	0,009581211	0,009811963	0,009876619	0,0135499	0,0138762	0,0139676	0,0140000

Tab.V.11 - Deslocamentos ao longo da bissetriz

Polígono inscrito

Coordenadas			Deslocamentos direção x e y			Deslocamentos direção radial			Solução Analítica Direção Radial
x	y	r	Discretização (a)	Discretização (b)	Discretização (c)	Discretiz. (a)	Discretiz. (b)	Discretiz. (c)	
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,0	1,0	1,41421	0,002288457	0,002290601	0,002291454	0,0032364	0,0032394	0,0032406	0,0032411
2,0	2,0	2,82843	0,004467713	0,004472002	0,004473708	0,0063183	0,0063244	0,0063268	0,0063278
3,0	3,0	4,24264	0,006428570	0,006435003	0,006437563	0,0090914	0,0091005	0,0091041	0,0091056
4,0	4,0	5,65685	0,008061851	0,008070404	0,008073817	0,0114012	0,0114133	0,0114181	0,0114201
5,0	5,0	7,07107	0,009258914	0,009269005	0,009273270	0,0130941	0,0131084	0,0131144	0,0131168
6,0	6,0	8,48528	0,009917057	0,009921739	0,009926725	0,0140248	0,0140315	0,0140385	0,0140414
7,07107	7,07107	10,0	0,009959785	0,009907103	0,009900456	0,0140853	0,0140108	0,0140014	0,0140000

Tab.V.12 - Deslocamentos ao longo da bissetriz

Polígono equivalente

Coordenadas			$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$			τ_{xy}		
x	y	r	Discret. a	Discret. b	Discret. c	Discret. a	Discret. b	Discret. c
0,0	0,0	0,0	3211,183	3277,136	3294,208	0,000	0,000	0,000
1,0	1,0	1,41421	3159,183	3225,136	3242,208	- 14,000	- 14,000	- 14,000
2,0	2,0	2,82843	3003,183	3069,136	3086,208	- 56,000	- 56,000	- 56,000
3,0	3,0	4,24264	2743,183	2809,136	2826,208	-125,998	-126,000	-126,000
4,0	4,0	5,65685	2379,185	2445,136	2462,208	-223,920	-223,999	-224,000
5,0	5,0	7,07107	1911,277	1977,137	1994,208	-348,443	-349,996	-350,000
6,0	6,0	8,48528	1340,955	1405,166	1422,208	-487,765	-503,467	-503,999
7,07107	7,07107	10,0	677,494	693,810	698,383	-625,922	-680,478	-695,018

Tab.V.13 - Tensões ao longo da bissetriz em relação aos eixos x e y

Polígono inscrito

Coordenadas			$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$			τ_{xy}		
x	y	r	Discret. a	Discret. b	Discret. c	Discret. a	Discret. b	Discret. c
0,0	0,0	0,0	3295,224	3298,287	3299,506	0,000	0,000	0,000
1,0	1,0	1,41421	3243,224	3246,287	3247,506	- 14,000	- 14,000	- 14,000
2,0	2,0	2,82843	3087,224	3090,287	3091,506	- 56,000	- 56,000	- 56,000
3,0	3,0	4,24264	2827,224	2830,287	2831,506	-125,999	-126,000	-126,000
4,0	4,0	5,65685	2463,226	2466,287	2467,506	-223,931	-224,000	-224,000
5,0	5,0	7,07107	1995,302	1998,287	1999,506	-348,652	-349,997	-350,000
6,0	6,0	8,48528	1424,698	1426,313	1427,506	-489,875	-503,510	-503,999
7,07107	7,07107	10,0	695,225	698,287	699,508	-642,305	-684,870	-696,140

Tab.V.14 - Tensões ao longo da bissetriz em relação aos eixos x e y

Polígono equivalente

Discretizações			Solução Analítica
(a)	(b)	(c)	
3211,183	3277,136	3294,208	σ_{θ} 3300
3173,183	3239,136	3256,208	3262
3059,183	3125,136	3142,208	3148
2869,181	2935,136	2952,208	2958
2603,105	2669,135	2686,208	2692
2259,720	2327,133	2344,208	2350
1828,720	1908,633	1926,207	1932
1303,416	1374,288	1393,401	1400

Tab.V.15 - Tensões σ_{θ} ao longo da bissetriz em relação aos eixos r e θ

Polígono inscrito

Discretizações			Solução Analítica
(a)	(b)	(c)	
3295,224	3298,287	3299,506	σ_{θ} 3300
3257,224	3260,287	3261,506	3262
3143,224	3146,287	3147,506	3148
2953,223	2956,287	2957,506	2958
2687,157	2690,287	2691,506	2692
2343,954	2348,284	2349,506	2350
1928,697	1929,823	1931,505	1932
1337,530	1383,157	1395,648	1400

Tab.V.16 - Tensões σ_{θ} ao longo da bissetriz em relação aos eixos r e θ

Polígono equivalente

Discretizações			Solução Analítica
(a)	(b)	(c)	
3211,183	3277,136	3294,208	σ_r 3300,00
3145,183	3211,136	3228,208	3234,00
2947,183	3013,136	3030,208	3036,00
2617,185	2683,136	2700,208	2706,00
2155,265	2221,137	2238,208	2244,00
1562,834	1627,141	1644,208	1650,00
853,190	901,699	918,208	924,00
51,572	13,332	3,365	0,0

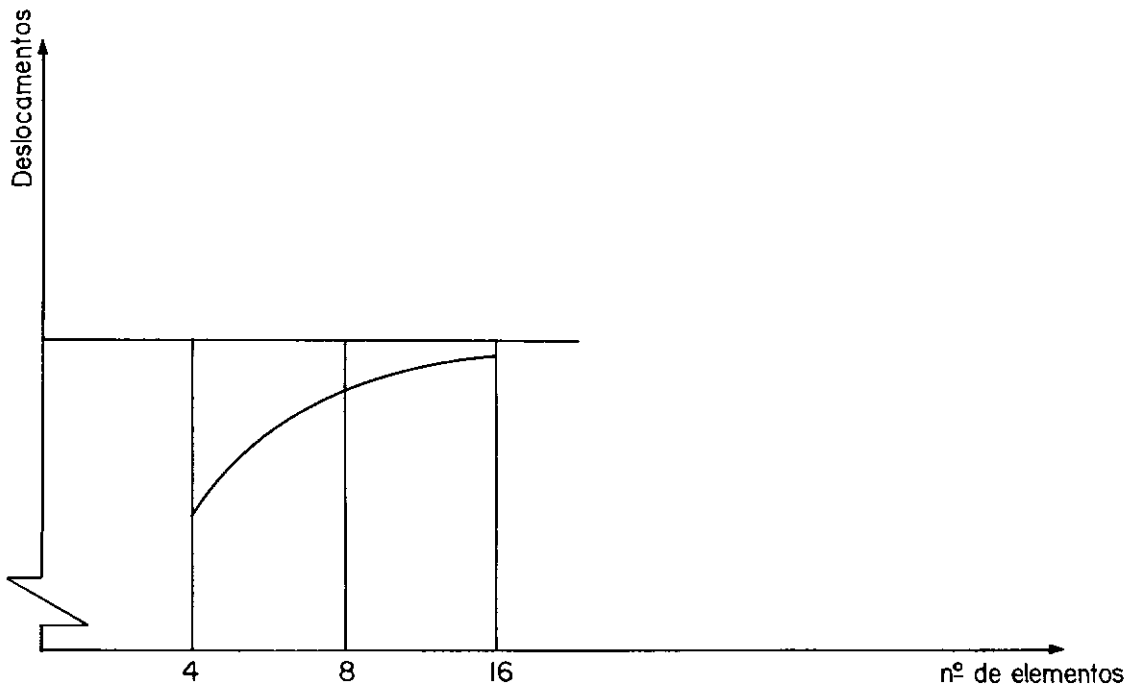
Tab.V.17 - Tensões σ_r ao longo da bissetriz em relação aos eixos r e θ

Polígono inscrito

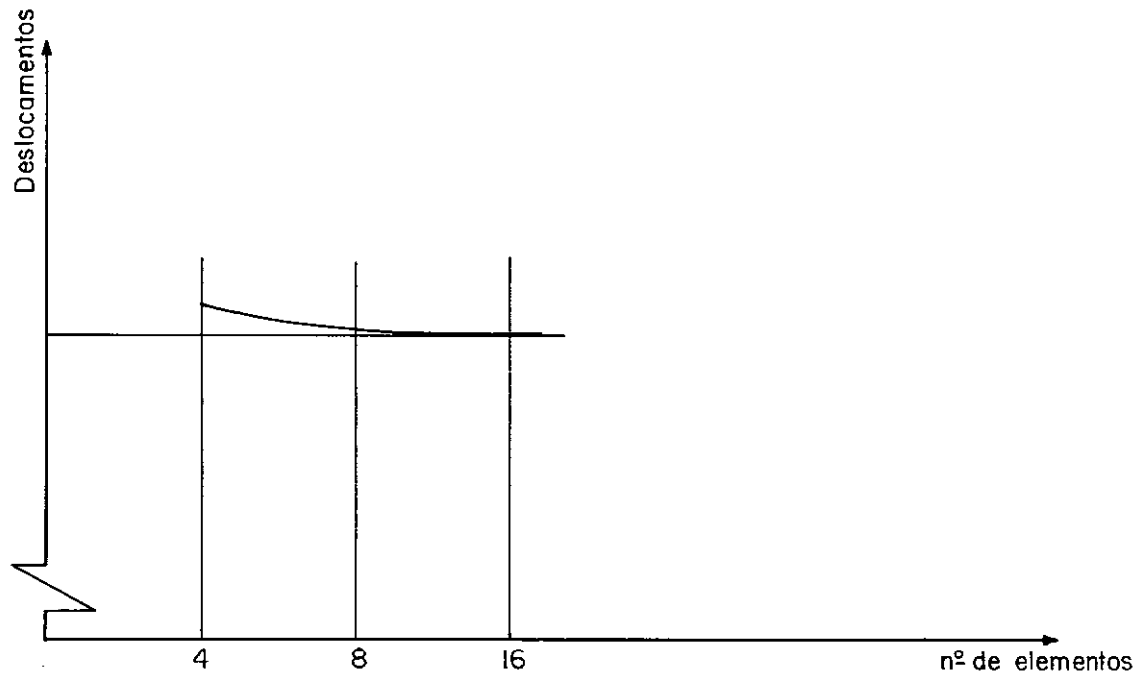
Discretizações			Solução Analítica
(a)	(b)	(c)	
3295,224	3298,287	3299,506	σ_r 3300
3229,224	3232,287	3233,506	3234
3031,224	3034,287	3035,506	3036
2701,225	2704,287	2705,506	2706
2239,295	2242,287	2243,506	2244
1646,650	1648,290	1649,506	1650
920,699	922,803	923,507	924
52,920	13,417	3,368	0

Tab.V.18 - Tensões σ_r ao longo da bissetriz em relação aos eixos r e θ

Polígono equivalente



a) Polígono inscrito



b) Polígono equivalente

Na Tabela (V.19) estão indicados os tempos gastos na análise.

Etapas Executadas	Tempos (seg.)		
	Discret. a	Discret. b	Discret. c
MAF	28,18	68,55	216,96
RSE	9,72	17,08	45,31
DTPI	155,77	214,54	317,14
Total	193,67	300,17	579,41

Tab.V.19 - Tempos gastos

V.7 - Chapa Quadrada Aquecida à Temperatura Constante

Como último exemplo estudou-se uma chapa quadrada aquecida à temperatura constante de 40°C , com $E=6.000.000$, $\alpha = 0,000001$ e $\nu = 0,30$, apresentada na Figura (V.12).

Foram feitas duas discretizações (Figura (V.13)) com condições de contorno diferentes, adotando simetria em relação aos dois eixos e dividindo o contorno em 2 elementos com o mesmo comprimento. Na primeira não foi prescrito nenhum deslocamento, enquanto que na segunda apoiou-se todos nós, na direção normal ao contorno.

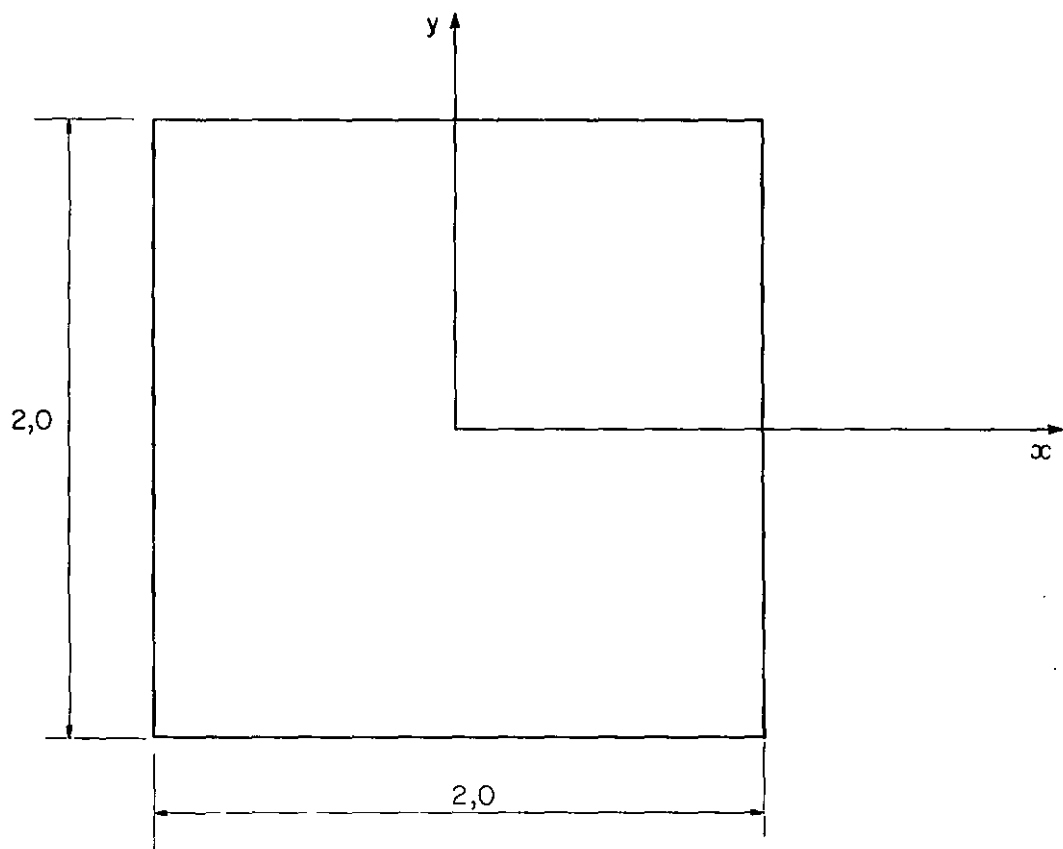


Fig.V.12 - Definição da chapa

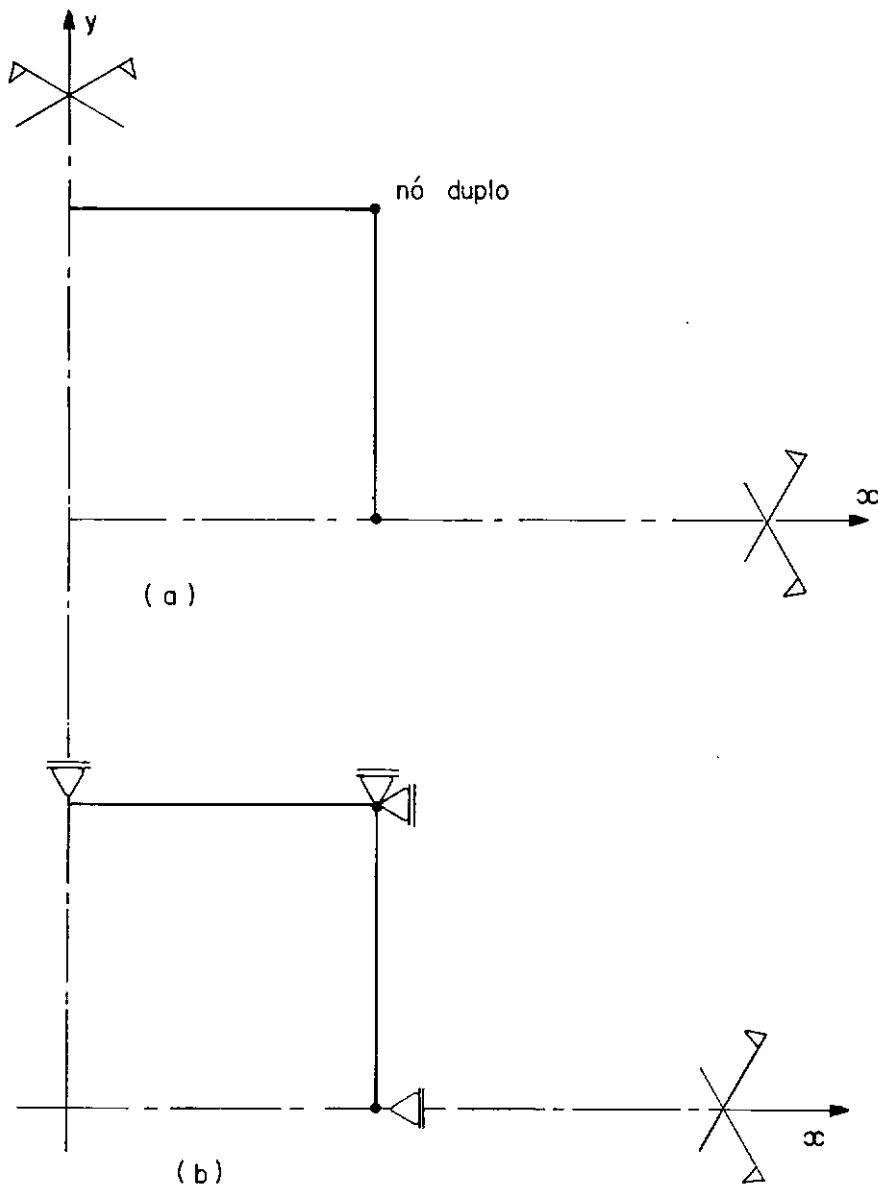


Fig.V.13 - Discretizações do problema

Os deslocamentos em quatro pontos internos selecionados e todos nós pertencentes ao contorno estão apresentados na Tabela (V.20), para discretização (a).

Coordenadas		Deslocamentos	
x	y	u	v
1,0	0,0	0,00004	0,0
1,0	1,0	0,00004	0,00004
0,0	1,0	0,0	0,00004
0,0	0,0	0,0	0,0
0,5	0,0	0,00002	0,0
0,0	0,5	0,0	0,00002
0,5	0,5	0,00002	0,00002

Tab.V.20 - Deslocamentos na chapa

Na discretização (a) todos deslocamentos coincidiram com a solução analítica, não aparecendo nenhuma tensão no contorno e nos pontos do domínio.

Na discretização (b) surgiram tensões σ_x e σ_y igual a 342,8571, a qual coincide com a analítica.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O programa desenvolvido permite a análise de grande variedade de estruturas no regime de elasticidade bidimensional linear, visto que os recursos implementados podem ser combinados de qualquer maneira adequada.

A entrada de dados foi facilitada pelo pré-processador, contendo geração automática e verificação dos erros, de tal sorte que na execução os dados estão depurados, evitando assim erros, devido à não consistência dos mesmos.

Todos os exemplos apresentaram simetria em relação aos eixos x e/ou y , portanto não foi necessário discretizar o contorno sobre o eixo de simetria, evitando assim as aproximações ao longo dos mesmos, possibilitando uma economia da matriz A e consequentemente uma diminuição no tempo de resolução do sistema de equações.

A convergência dos deslocamentos e das tensões foi bastante satisfatória para os exemplos em que foi analisada. Cabe observar porém, que o Método dos Elementos de Contorno, por ser do tipo misto, apresenta resultados que não signifiquem um limite superior ou inferior da solução, existindo inclusive, alguma alternância de sinal do erro. Muito embora o erro absoluto demonstra claramente a convergência do método.

Para evitar o mau condicionamento da matriz \tilde{A} , o nó funcional deve ser afastado do geométrico (elemento com descontinuidade) nas seguintes situações:

- Nós pertencentes aos eixos de simetria;
- Nós pertencentes à interface em cantos no interior do domínio.

Este procedimento é aconselhável apenas nestes casos, pelo fato da ligeira deterioração de resultados, devido à extrapolação entre o nó funcional e o geométrico, além de aumentar a dimensão da matriz.

Cabe salientar que as interfaces discretizadas das sub-regiões introduzem aproximações ao longo das mesmas.

Não foram fixados os valores das constantes geométricas a e b (distância entre o nó funcional e geométrico no início e final do elemento, respectivamente), o que proporciona uma maior flexibilidade, podendo inclusive ser determinado a melhor distância para cada problema particular.

Para a continuidade deste trabalho comenta-se a seguir algumas implementações futuras:

- a) Solução fundamental do semi-plano proposto por Melan [28],

- b) Cálculo das temperaturas e suas derivadas em relação à normal no contorno e posteriormente no domínio,
- c) Subrotina para resolver o sistema de equações, particionando a matriz \tilde{A} , com armazenamento em memória secundária, visando a análise de estruturas de grande porte,
- d) Para problemas com subregiões a matriz \tilde{A} apresenta blocos, com coeficientes nulos. Desenvolver um processo para armazenar apenas os coeficientes não nulos, possibilitando resolver o sistema de equações de forma mais eficiente,
- e) Outros tipos de elementos, tais como, quadráticos e elementos interpolados (elementos nos quais o ponto fonte é colocado afastado do nó funcional, que coincide com o nó geométrico, sendo a solução interpolada em função dos nós extremos),
- f) Pré-processador gráfico para uma melhor visualização do problema analisado e um pós-processador gráfico, para uma melhor análise dos resultados,
- g) Refinamento auto-adaptativo do tipo H e P.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MIKHLIN, S.G. - Integral equations - Pergamon Press, London (1957).
- [2] MUSKHELISHVILI, N.I. - Some basic problems of the mathematical theory of elasticity - Noordhoff, Holland (1953).
- [3] RIZZO, F.J. - An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics - Quart. Appl. Math. 25 (1967) 83-95.
- [4] RICARDELLA, P.C. - An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity - Report nº SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon Univ., Pittsburg.
- [5] LACHAT, J.A. - A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics - Ph.D. Thesis, University of Southampton, UK (1975).
- [6] HALBRITTER, A.L.; TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J. - "Aplicação dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo" - Anais da Conferência sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, UFRGS, paper nº 39, pp. 707-724 (1978).

- [7] MANSUR, W.J.; HALBRITTER, A.L.; TELLES, J.C.F. - "Formula
ção do Método dos Elementos de Contorno para a Elastici
dade Bidimensional" - Anais em Comemoração aos 15
anos da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Vol. 1, pp. 1 - 22
(1978).
- [8] TELLES, J.C.F.; MANSUR, W.J.; HALBRITTER, A.L. - "Aplicação
do Método dos Elementos de Contorno à Elasticidade Lini
near Bidimensional" - Anais do II Simpósio sobre Sis-
temas Computacionais para Engenharia Civil, CESP, São
Paulo, pp. 303 - 314 (1978).
- [9] MOREIRA, M.S.S. - Análise de Problemas de Elasticidade Bi
dimensional com o Método dos Elementos de Contorno, Tese
de M.Sc., COPPE/UFRJ (1983).
- [10] KELLOGG, O.D. - Foundations of Potential Theory - Springer
Verlag, Berlin (1929).
- [11] FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics - Pentice-Hall,
Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [12] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. - Teoria da Elasticidade -
Guanabara Dois, 3^a edição (1980).
- [13] DYM, C.L.; SHAMES, I.H. - Solid Mechanics: A variational
Approach - Mc Graw-Hill (1973).
- [14] SOKOLNIKOFF, I.S. - Mathematical theory of Elasticity -
Mc Graw-Hill, N.Y. (1956).

- [15] BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers - Petech Press, London (1978).
- [16] LOVE, A.E.H. - A Treatise on the Mathematical theory of Elasticity - New York, Dover Publications, 4^a edição (1944).
- [17] TELLES, J.C.F. - The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems - Lecture Notes in Engineering, Vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [18] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. - Boundary Element Techniques - Springer Verlag, Berlin (1984).
- [19] BREBBIA, C.A.; WALHER, S. - Boundary Element Techniques in Engineering - Butterworths, London (1980).
- [20] HARTMANN, F. - "Compating the C - matrix in non-smooth boundary points" - New Developments in Boundary Element Methods pp. 367 - 379, Butterworths, London (1980).
- [21] CROUCH, S.L.; STARFIELD, A.M. - Boundary element methods in solid mechanics - George Allen & Unwin, London (1983).
- [22] STIPPES, M.; RIZZO, F.J. - "A note on the body force integral of classical elastostatics" - Z. Angew. Math. Phys. 28, 339 - 341 (1977).

- [23] DANSON, D.J. - "A boundary element formulation of problems in linear isotropic elasticity with body forces". Boundary Element Methods - (C.A. Brebbia, Ed.), pp. 105 - 122, Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [24] JASWON, M.A.; SYMM, G.T. - Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics - Academic Press, London, (1977).
- [25] PAULA, F.A. - Obtenção de matriz de rigidez utilizando o método dos elementos de contorno - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1986).
- [26] STROUD, A.H.; SECREST, D. - Gaussian Quadrature Formulas - Prentice-Hall, New York (1966).
- [27] UGURAL, A.C.; FENSTER, S.K. - Advanced Strength and Applied Elasticity - American Elsevier Publishing Company, New York (1975).
- [28] TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. - "Boundary Element solution for Half-Plane problems" - International Journal Solids Structures, vol. 17, nº 12, pp. 1149 - 1158 (1981).

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO PARA O ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO

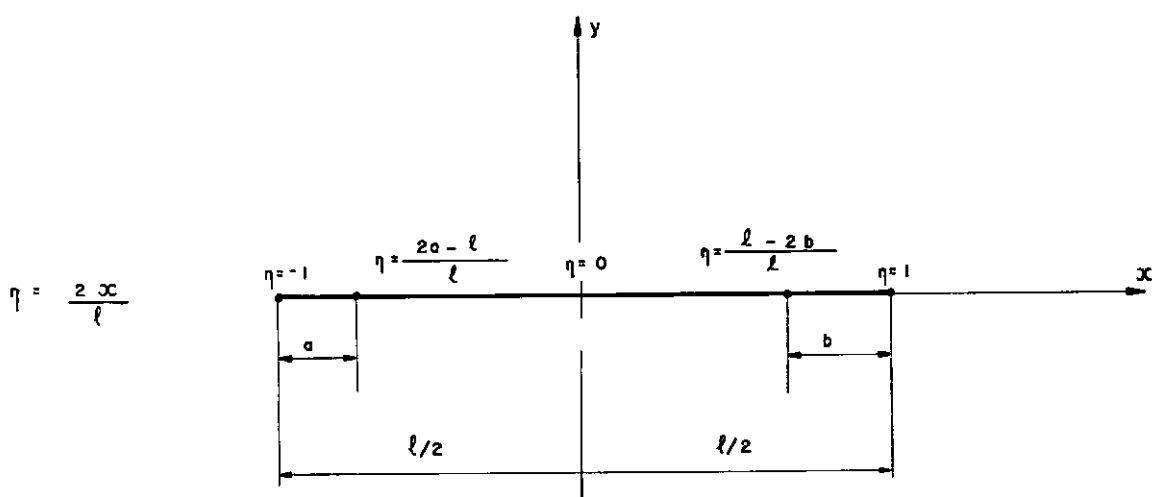


Fig.A.1 - Elemento descontínuo

$$u = u_1 \phi^1 + u_2 \phi^2$$

$$v = v_1 \phi^1 + v_2 \phi^2$$

$$\text{Para } x = - \left(\frac{l}{2} - a \right) \text{ tem-se } \phi^1 = 1 \quad \phi^2 = 0$$

(A.1)

$$\text{Para } x = \frac{l}{2} - b \quad \text{tem-se } \phi^1 = 0 \quad \phi^2 = 1$$

Adotando para as funções de interpolação uma variação linear, ou seja:

$$\phi^1 = cx + d$$

(A.2)

$$\phi^2 = fx + g$$

Substituindo os dois valores de x apresentados em (A.1) nas Expressões (A.2), determinam-se as seguintes expressões:

$$\frac{c}{2} (2a - \ell) + d = 1$$

$$\frac{f}{2} (2a - \ell) + g = 0$$

(A.3)

$$\frac{c}{2} (\ell - 2b) + d = 0$$

$$\frac{f}{2} (\ell - 2b) + g = 1$$

Resolvendo este sistema de equações obtem-se os valores para as constantes

$$c = \frac{1}{a + b - \ell} \quad d = \frac{2b - \ell}{2(a + b - \ell)}$$

(A.4)

$$f = \frac{1}{\ell - a + b} \quad g = \frac{\ell - 2a}{2(\ell - a - b)}$$

Substituindo estas constantes (A.4) em (A.2), tendo em mente que $x = \ell/2\eta$, determinam-se as funções de interpolação:

$$\phi^1 = \frac{\ell}{2(a + b - \ell)} \eta + \frac{2b - \ell}{2(a + b - \ell)}$$

$$\phi^2 = \frac{\ell}{2(\ell - a - b)} \eta + \frac{\ell - 2a}{2(\ell - a - b)}$$

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA PARA O ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO QUANDO
PONTO-FONTE PERTENCE AO ELEMENTO A SER INTEGRADO

B.1 - Submatriz G

Seja considerar a Expressão (II.47) de uma forma simplificada

$$u_{ij}^*(\xi, x) = c_1 \delta_{ij} \ln r + c_2, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$c_1 = \frac{-(3 - 4\nu)}{8\pi(1 - \nu)G} \quad (\text{B.2})$$

$$c_2 = \frac{r_{,i} r_{,j}}{8\pi(1 - \nu)G}$$

Cabe salientar que apesar da variação de r ser diferente antes e depois do ponto fonte ξ , o produto $r_{,i} r_{,j}$ não se altera, mantendo constante c_2 e conservando o sinal antes e depois de ξ .

B.1.1 - Função de interpolação ϕ^1

$$g_{ij}^1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^*(\xi, x) \phi^1(\eta) d\eta \quad (\text{B.3})$$

Substituindo as Expressões (B.1) e (III.4) em (B.3),

tem-se:

$$g_{ij}^1 = \frac{\ell^2}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} (c_1 \delta_{ij} \ell n r + c_2) (1 - \eta) d\eta -$$

$$- \frac{\ell b}{2(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} (c_1 \delta_{ij} \ell n r + c_2) d\eta \quad (B.4)$$

B.1.1.1 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (1)

A distância $r = r(\xi, x)$ pode ser escrita em função de η na seguinte forma:

$$-1 \leq \eta < \frac{2a - \ell}{\ell} \implies r = -\frac{\ell}{2} (\eta + 1) + a$$

$$\frac{2a - \ell}{\ell} < \eta \leq 1 \implies r = \frac{\ell}{2} (\eta + 1) - a$$

$$r = \left| \frac{\ell}{2} (1 + \eta) - a \right| \quad (B.5)$$

Introduzindo a Expressão (B.5) em (B.4), tem-se:

$$g_{ij}^{11} = \frac{\ell^2}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} \left[c_1 \delta_{ij} \ell n \left| \frac{\ell}{2} (1 + \eta) - a \right| + c_2 \right] (1 - \eta) d\eta -$$

$$- \frac{\ell b}{2(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} \left[c_1 \delta_{ij} \ell n \left| \frac{\ell}{2} (1 + \eta) - a \right| + c_2 \right] d\eta \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{11} = & c_3 \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right| d\eta - c_4 \int_{-1}^{+1} \eta \ln \left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right| d\eta + \\
 & + c_6 \int_{-1}^{+1} d\eta - c_7 \int_{-1}^{+1} \eta d\eta
 \end{aligned} \quad (B.7)$$

onde: $c_3 = \ell c_1 \delta_{ij} \frac{(\ell - 2b)}{4(\ell - a - b)}$,

$$c_4 = \frac{\ell^2 c_1 \delta_{ij}}{4(\ell - a - b)},$$

$$c_5 = \frac{\ell}{2} - a, \quad (B.8)$$

$$c_6 = \ell c_2 \frac{(\ell - 2b)}{4(\ell - a - b)},$$

$$c_7 = \frac{\ell^2 c_2}{4(\ell - a - b)}$$

No ponto $\eta = \frac{2a - \ell}{\ell}$ existe uma singularidade, portanto deve-se reescrever a Expressão (B.7) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{11} = & \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_3 \int_{-1}^{\frac{2a-\ell}{\ell}-t} \ln \left(\frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right) d\eta + c_3 \int_{\frac{2a-\ell}{\ell}+t}^{+1} \ln \left(\frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right) d\eta - \right. \\
 & - c_4 \int_{-1}^{\frac{2a-\ell}{\ell}-t} \eta \ln \left(\frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right) d\eta - c_4 \int_{\frac{2a-\ell}{\ell}+t}^{+1} \eta \ln \left(\frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right) d\eta + c_6 \int_{-1}^{\frac{2a-\ell}{\ell}-t} d\eta + \\
 & \left. + c_6 \int_{\frac{2a-\ell}{\ell}+t}^{+1} d\eta - c_7 \int_{-1}^{\frac{2a-\ell}{\ell}-t} \eta d\eta - c_7 \int_{\frac{2a-\ell}{\ell}+t}^{+1} \eta d\eta \right\}
 \end{aligned} \quad (B.9)$$

Calculando as integrais da Expressão (B.9) separadamente, obtem-se as seguintes expressões:

$$\Lambda_1 = c_3 \left\{ \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l}-t} \ln \left(-\frac{l}{2} \eta - \frac{l}{2} + a \right) d\eta + \int_{\frac{2a-l}{l}+t}^1 \ln \left(\frac{l}{2} \eta + \frac{l}{2} - a \right) d\eta \right\}$$

$$\Lambda_1 = c_3 \left[2t - 2t \ln \frac{lt}{2} + \frac{2a}{l} \ln a + \frac{2(l-a)}{l} \ln (l-a) - 2 \right] \quad (B.10)$$

$$\Lambda_2 = c_4 \left\{ \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l}-t} \eta \ln \left(-\frac{l}{2} \eta - \frac{l}{2} + a \right) d\eta + \int_{\frac{2a-l}{l}+t}^1 \eta \ln \left(\frac{l}{2} \eta + \frac{l}{2} - a \right) d\eta \right\}$$

$$\Lambda_2 = -c_4 \left[3t \ln \frac{t\ell}{2} - 3t - 2at \ln \frac{lt}{2} + 2at - \frac{2at}{l} \ln \frac{t\ell}{2} + \right.$$

$$+ \frac{2at}{l} + \frac{2a^2}{l^2} \ln a - \frac{2a}{l} - \frac{2a}{l} \ln a + 1 - \frac{2a^2}{l^2} \ln (l-a) +$$

$$\left. + \frac{2a}{l} \ln (l-a) \right] \quad (B.11)$$

$$\Lambda_3 = c_6 \left\{ \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l}-t} d\eta + \int_{\frac{2a-l}{l}+t}^1 d\eta \right\}$$

$$\Lambda_3 = 2c_6 (1 - t) \quad (B.12)$$

$$\Lambda_4 = -c_7 \left\{ \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l}-t} \eta d\eta + \int_{\frac{2a-l}{l}+t}^1 \eta d\eta \right\}$$

$$\Lambda_4 = \frac{2c_7 t (2a - l)}{l} \quad (B.13)$$

Agrupando as Expressões (B.10), (B.11), (B.12) e (B.13) na Expressão (B.9), obtem-se:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{11} = \lim_{t \rightarrow 0} & \left\{ c_3 \left[2t - 2t \ln \frac{\ell t}{2} + \frac{2a}{\ell} \ln a + \frac{2(\ell - a)}{\ell} \ln (\ell - a) - 2 \right] - \right. \\
 & - c_4 \left[3t \ln \frac{t\ell}{2} - 3t - 2at \ln \frac{\ell t}{2} + 2at - \frac{2at}{\ell} \ln \frac{t\ell}{2} + \frac{2at}{\ell} + \right. \\
 & + \frac{2a^2}{\ell^2} \ln a - \frac{2a}{\ell} - \frac{2a}{\ell} \ln a + 1 - \frac{2a^2}{\ell^2} \ln (\ell - a) + \\
 & \left. \left. + \frac{2a}{\ell} \ln (\ell - a) \right] + 2c_6 (1 - t) + \frac{2c_7 t (2a - \ell)}{\ell} \right\} \quad (B.14)
 \end{aligned}$$

O cálculo do limite quando t tende a zero fornece:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{11} = c_3 & \left[\frac{2a}{\ell} \ln a + \frac{2(\ell - a)}{\ell} \ln (\ell - a) - 2 \right] - c_4 \left[\frac{2a^2}{\ell^2} \ln a - \right. \\
 & \left. - \frac{2a}{\ell} - \frac{2a}{\ell} \ln a + 1 - \frac{2a^2}{\ell^2} \ln (\ell - a) + \frac{2a}{\ell} \ln (\ell - a) \right] + 2c_6 \quad (B.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{11} = \ln (\ell - a) & \left[\frac{2(\ell - a)}{\ell} \left(c_3 - \frac{ac_4}{\ell} \right) \right] + \frac{2a}{\ell} \ln a \left[c_3 + \frac{c_4}{\ell} (\ell - a) \right] - \\
 & - 2c_3 + c_4 \left(\frac{2a}{\ell} - 1 \right) + 2c_6 \quad (B.16)
 \end{aligned}$$

B.1.1.2 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (2)

A distância $r = r(\xi, x)$ pode ser escrita em função de η na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 -1 \leq \eta < \frac{2a - \ell}{\ell} &\implies r = \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \\
 \frac{\ell - 2b}{\ell} < \eta \leq +1 &\implies r = -\frac{\ell}{2} (1 - \eta) + b \\
 r &= \left| \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \right| \quad (B.17)
 \end{aligned}$$

Introduzindo a Expressão (B.17) em (B.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{21} = c_3 \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \right| d\eta - c_4 \int_{-1}^{+1} \eta \ln \left| \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \right| d\eta + \\
 + c_6 \int_{-1}^{+1} d\eta - c_7 \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \quad (B.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{21} = c_3 \int_{-1}^{+1} \ln \left| -\frac{\ell}{2} \eta + c_5^* \right| d\eta - c_4 \int_{-1}^{+1} \eta \ln \left| -\frac{\ell}{2} \eta + c_5^* \right| d\eta + \\
 + c_6 \int_{-1}^{+1} d\eta - c_7 \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \quad (B.19)
 \end{aligned}$$

onde $c_5^* = \frac{\ell}{2} - b$, e as demais constantes definidas pelas Expressões (B.8).

No ponto $\eta = \frac{\ell - 2b}{\ell}$ existe uma singularidade, portanto deve-se reescrever a Expressão (B.19) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{21} = \lim_{t \rightarrow 0} & \left\{ c_3 \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} \ln \left(\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta + c_3 \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 \ln \left(-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta - \right. \\
& - c_4 \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} \eta \ln \left(\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta - c_4 \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 \eta \ln \left(-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta + \\
& + c_6 \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} d\eta + c_6 \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 d\eta - c_7 \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} \eta d\eta - c_7 \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 \eta d\eta \left. \right\} \quad (B.20)
\end{aligned}$$

Calculando as integrais da Expressão (B.20) separadamente, obtem-se as seguintes expressões:

$$\Lambda_1 = c_3 \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} \ln \left(\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta + \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 \ln \left(-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta \right\} \quad (B.21)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \frac{2c_3}{\ell} \left[\ell t - \ell t \ln \frac{\ell t}{2} + (\ell - b) \ln (\ell - b) - \ell + b \ln b \right] \\
\Lambda_2 &= c_4 \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell}-t} \eta \ln \left(\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta + \int_{\frac{\ell-2b}{\ell}+t}^1 \eta \ln \left(-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta \right) d\eta \right\} \\
\Lambda_2 &= \frac{2c_4(\ell - 2b)}{\ell^2} \left[\ell t - \ell t \ln \frac{\ell t}{2} + (\ell - b) \ln (\ell - b) - \ell + b \ln b \right] + \quad (B.22) \\
&+ \frac{2c_4}{\ell^2} \left[b^2 \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) - (\ell - b)^2 \left(\ln (\ell - b) - \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\Lambda_3 = c_6 \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} d\eta + \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 d\eta \right\} \quad (\text{B.23})$$

$$\Lambda_3 = 2c_6 (1 - t)$$

$$\Lambda_4 = c_7 \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} \eta d\eta + \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 \eta d\eta \right\} \quad (\text{B.24})$$

$$\Lambda_4 = - 2c_7 \frac{(\ell - 2b)}{\ell} t$$

Agrupando as Expressões (B.21), (B.22), (B.23) e (B.24) em (B.20), obtem-se:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{21} = & \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2c_3}{\ell} \left[\ell t - \ell t \ln \frac{\ell t}{2} + (\ell - b) \ln (\ell - b) - \ell + b \ln b \right] - \right. \\ & - \frac{2c_4(\ell-2b)}{\ell^2} \left[\ell t - \ell t \ln \frac{\ell t}{2} + (\ell - b) \ln (\ell - b) - \ell + b \ln b \right] - \\ & - \frac{2c_4}{\ell^2} \left[b^2 \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) - (\ell - b)^2 \left(\ln (\ell - b) - \frac{1}{2} \right) + 2c_6 (1-t) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2c_7(\ell - 2b)}{\ell} t \right\} \quad (\text{B.25}) \end{aligned}$$

O cálculo do limite quando t tende a zero fornece:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{21} = & \frac{2c_3}{\ell} \left[(\ell - b) \ln (\ell - b) - \ell + b \ln b \right] - \frac{2c_4 (\ell - 2b)}{\ell^2} \left[(\ell - b) \ln (\ell - b) - \right. \\
 & \left. - \ell + b \ln b \right] - \frac{2c_4}{\ell^2} \left[b^2 \left(\ln b - \frac{1}{2} \right) - (\ell - b)^2 \left(\ln (\ell - b) - \frac{1}{2} \right) \right] + \\
 & + 2c_6
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Após operações algébricas e simplificações na Expressão (B.26), tem-se:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{21} = & \ln (\ell - b) \left[\frac{2 (\ell - b)}{\ell} \left(c_3 + \frac{c_4 b}{\ell} \right) \right] + \frac{2b}{\ell} \ln b \left[c_3 - \frac{c_4}{\ell} (\ell - b) \right] - \\
 & - 2c_3 + c_4 \left(1 - \frac{2b}{\ell} \right) + 2c_6
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

B.1.2 - Função de interpolação ϕ^2

$$g_{ij}^2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^* (\xi, x) \phi^2 (\eta) d\eta \tag{B.28}$$

Substituindo as Expressões (B.1) e (III.4) em (B.28), tem-se:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^2 = & \frac{\ell^2}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} (c_1 \delta_{ij} \ell n r + c_2) (1 + \eta) d\eta - \\
& - \frac{a\ell}{2(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} (c_1 \delta_{ij} \ell n r + c_2) d\eta
\end{aligned} \quad (B.29)$$

B.1.2.1 - Ponto fonte ξ aplicado no n \tilde{o} (1)

Introduzindo a Express \tilde{a} o (B.5) em (B.29), tem-se:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{12} = & c_3^* \int_{-1}^{+1} \ell n \left| \frac{\ell}{2} \eta + \frac{\ell}{2} - a \right| d\eta + c_4 \int_{-1}^{+1} \eta \ell n \left| \frac{\ell}{2} \eta + \frac{\ell}{2} - a \right| d\eta + \\
& + c_6^* \int_{-1}^{+1} d\eta + c_7 \int_{-1}^{+1} \eta d\eta
\end{aligned} \quad (B.30)$$

$$\text{onde: } c_3^* = \ell c_1 \delta_{ij} \frac{(\ell - 2a)}{4(\ell - a - b)}, \quad (B.31)$$

$$c_6^* = \ell c_2 \frac{(\ell - 2a)}{4(\ell - a - b)},$$

as demais constantes est \tilde{a} o apresentadas em (B.8).

Seguindo os mesmos passos realizados no item (B.1.1.1), calculando as mesmas integrais, chegou-se \tilde{a} seguinte express \tilde{a} o:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{12} = & \ln(\ell - a) \left[\frac{2(\ell - a)}{\ell} \left(c_3^* + \frac{ac_4}{\ell} \right) \right] + \frac{2a}{\ell} \ln a \left[c_3^* - \frac{c_4}{\ell} (\ell - a) \right] - \\
& - 2c_3^* - c_4 \left(\frac{2a}{\ell} - 1 \right) + 2c_6^* \quad (B.32)
\end{aligned}$$

B.1.2.2 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (2)

Introduzindo a Expressão (B.17) em (B.29), tem-se:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{22} = & c_3^* \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \eta - b \right| d\eta + c_4 \int_{-1}^{+1} \eta \ln \left| \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \eta - b \right| d\eta + \\
& + c_6^* \int_{-1}^{+1} d\eta + c_7 \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \quad (B.33)
\end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos realizados no ítem (B.1.1.2), calculando as mesmas integrais, chegou-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{22} = & \ln(\ell - b) \left[\frac{2(\ell - b)}{\ell} \left(c_3^* - \frac{c_4 b}{\ell} \right) \right] + \frac{2b}{\ell} \ln b \left[c_3^* + \frac{c_4}{\ell} (\ell - b) \right] - \\
& - 2c_3^* - c_4 \left(1 - \frac{2b}{\ell} \right) + 2c_6^* \quad (B.34)
\end{aligned}$$

Operando algebricamente, simplificando alguns termos e agrupando as Expressões (B.16), (B.27), (B.32) e (B.34), obtém-se a expressão final:

$$g_{ij}^{kn} = \left\{ \begin{aligned} & 2(\ell - 2\delta_{kn} B - A) (\ell - A) \ln (\ell - A) + \\ & + 2 \left[2\delta_{kn} (\ell - B) - A \right] A \ln A - \left[\ell - 2A + \right. \\ & \left. + 2\delta_{kn} (\ell - 2B) \right] \ell \end{aligned} \right\} \frac{c_1 \delta_{ij}}{4(\ell - a - b)} \quad (\text{B.35})$$

onde: $A = \delta_{1k} a + \delta_{2k} b$ (B.36)

$$B = \delta_{1n} b + \delta_{2n} a$$

B.2 - Submatriz H

Seja considerar agora a Expressão (II.48) de uma forma simplificada

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{c_8}{r} \quad (\text{B.37})$$

onde $c_8 = \frac{(1 - 2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)}{4\pi (1 - \nu)}$ (B.38)

Para todos quadrantes o termo $r_{,i} n_j - r_{,j} n_i$ troca de sinal, quando $i \neq j$, dependendo da posição de x antes ou depois do ponto fonte ξ , ou seja:

i	j	$r_{,i} n_j - r_{,j} n_i$	
		antes	depois
1	1	0	0
1	2	+1	-1
2	1	-1	+1
2	2	0	0

Tab.B.1 - Valores do termo $r_{,i} n_j - r_{,j} n_i$ antes e depois de ξ

Nesta demonstração considerou-se $i = 1$ e $j = 2$, sendo a Expressão (B.38) escrita na seguinte forma:

$$c_8 = \frac{(1 - 2\nu) (\delta_{ij} - 1)^j}{4\pi (1 - \nu)} \quad (\text{B.39})$$

B.2.1 - Função de interpolação ϕ^1

$$h_{ij}^1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} p_{ij}^*(\xi, x) \phi^1(\eta) d\eta \quad (\text{B.40})$$

Substituindo as Expressões (B.37) e (III.4) em (B.40), tem-se:

$$h_{ij}^1 = \frac{\ell(\ell - 2b)}{4(\ell - a - b)} c_8 \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r} d\eta - \frac{\ell^2}{4(\ell - a - b)} c_8 \int_{-1}^{+1} \frac{\eta}{r} d\eta \quad (\text{B.41})$$

B.2.1.1 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (1)

A distância $r = r(\xi, x)$ é escrita em termos da variável adimensional η da mesma forma apresentada no item (B.1.1.1).

Introduzindo a Expressão (B.5) em (B.41) obtem-se:

$$h_{ij}^{11} = \frac{\ell(\ell - 2b) c_8}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right|} - \frac{\ell^2 c_8}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right|} \quad (B.42)$$

$$h_{ij}^{11} = c_9 \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right|} - c_{10} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} \eta + c_5 \right|} \quad (B.43)$$

onde: $c_9 = \frac{c_8 \ell(\ell - 2b)}{4(\ell - a - b)},$ (B.44)

$$c_{10} = \frac{\ell^2 c_8}{4(\ell - a - b)}$$

No ponto $\eta = \frac{2a - \ell}{\ell}$ existe uma singularidade, portanto deve-se reescrever a Expressão (B.43), na seguinte forma:

$$h_{ij}^{11} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_9 \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l} - t} \frac{d\eta}{-\frac{l}{2} \eta - c_5} - c_9 \int_{\frac{2a-l}{2} + t}^1 \frac{d\eta}{\frac{l}{2} \eta + c_5} - \right. \\ \left. - c_{10} \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l} - t} \frac{\eta d\eta}{-\frac{l}{2} \eta - c_5} + c_{10} \int_{\frac{2a-l}{l} + t}^1 \frac{\eta d\eta}{\frac{l}{2} \eta + c_5} \right\} \quad (B.45)$$

Calculando as integrais da Expressão (B.45) separadamente, chegou-se nas seguintes expressões:

$$\Lambda_1 = c_9 \left\{ \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l} - t} \frac{d\eta}{-\frac{l}{2} \eta + a - \frac{l}{2}} - \int_{\frac{2a-l}{2} + t}^1 \frac{d\eta}{\frac{l}{2} \eta - a + \frac{l}{2} \eta} \right\} \\ \Lambda_1 = \frac{2c_9}{l} \left[\ln a - \ln (l - a) \right] \quad (B.46)$$

$$\Lambda_2 = c_{10} \left\{ - \int_{-1}^{\frac{2a-l}{l} - t} \frac{\eta d\eta}{-\frac{l}{2} \eta - \frac{l}{2} + a} + \int_{\frac{2a-l}{l} + t}^1 \frac{\eta d\eta}{\frac{l}{2} \eta + \frac{l}{2} - a} \right\}$$

$$\Lambda_2 = \frac{2c_{10} (l - 2a)}{l^2} \left[\ln a - \ln (l - a) \right] - \frac{4t c_{10}}{l} + \frac{4 c_{10}}{l} \quad (B.47)$$

Agrupando as Expressões (B.46) e (B.47) na Expressão (B.45), obtem-se:

$$h_{ij}^{11} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2 c_9}{\ell} \left[\ln a - \ln (\ell - a) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2 c_{10} (\ell - 2a)}{\ell^2} \left[\ln a - \ln (\ell - a) \right] - \frac{4t c_{10}}{\ell} + \frac{4 c_{10}}{\ell} \right\} \quad (B.48)$$

O cálculo do limite quanto t tende a zero fornece:

$$h_{ij}^{11} = \left[\ln a - \ln (\ell - a) \right] \left[\frac{2 c_9}{\ell} + \frac{2 c_{10} (\ell - 2a)}{\ell^2} \right] + \frac{4 c_{10}}{\ell} \quad (B.49)$$

B.2.1.2 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (2)

A distância $r = r(\xi, x)$ é escrita em termos da variável adimensional η da mesma forma apresentada no item (B.1.1.2).

Introduzindo a Expressão (B.17) em (B.41), obtem-se:

$$h_{ij}^{21} = c_9 \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \right|} - c_{10} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta d\eta}{\left| \frac{\ell}{2} (1 - \eta) - b \right|} \quad (B.50)$$

$$h_{ij}^{21} = c_9 \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\left| -\frac{\ell}{2} \eta + c_5^* \right|} - c_{10} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta d\eta}{\left| -\frac{\ell}{2} \eta + c_5^* \right|} \quad (\text{B.51})$$

No ponto $\eta = \frac{\ell - 2b}{\ell}$ existe uma singularidade, portanto deve-se reescrever a Expressão (B.19) na seguinte forma:

$$h_{ij}^{21} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_9 \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} \frac{d\eta}{\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta} - c_9 \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 \frac{d\eta}{-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta} - c_{10} \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} \frac{\eta d\eta}{\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta} + c_{10} \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 \frac{\eta d\eta}{-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta} \right\} \quad (\text{B.52})$$

Calculando as integrais da Expressão (B.52) separadamente, chegou-se nas seguintes expressões:

$$\Lambda_1 = c_9 \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} \frac{d\eta}{\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta} - \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 \frac{d\eta}{-\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta} \right\}$$

$$\Lambda_1 = \frac{2 c_9}{\ell} \left[\ell \ln (\ell - b) - \ell \ln b \right] \quad (\text{B.53})$$

$$\Lambda_2 = c_{10} \left\{ \int_{-1}^{\frac{\ell-2b}{\ell} - t} \frac{\eta d\eta}{\frac{\ell}{2} - b - \frac{\ell}{2} \eta} + \int_{\frac{\ell-2b}{\ell} + t}^1 \frac{\eta d\eta}{\frac{\ell}{2} + b + \frac{\ell}{2} \eta} \right\}$$

$$\Lambda_2 = - \frac{2(\ell - 2b) c_{10}}{\ell^2} \left[\ln(\ell - b) - \ln b \right] - \frac{4t c_{10}}{\ell} + \frac{4 c_{10}}{\ell} \quad (\text{B.54})$$

Agrupando as Expressões (B.53) e (B.54) em (B.52), tem-se:

$$h_{ij}^{21} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2 c_g}{\ell} \left[\ln(\ell - b) - \ln b \right] - \frac{2(\ell - 2b) c_{10}}{\ell^2} \left[\ln(\ell - b) - \ln b \right] - \frac{4t c_{10}}{\ell} + \frac{4 c_{10}}{\ell} \right\} \quad (\text{B.55})$$

O cálculo do limite quanto t tende a zero fornece:

$$h_{ij}^{21} = \left[\ln(\ell - b) - \ln b \right] \left[\frac{2 c_g}{\ell} - \frac{2 c_{10} (\ell - 2b)}{\ell^2} \right] + \frac{4 c_{10}}{\ell} \quad (\text{B.56})$$

B.2.2 - Função de interpolação ϕ^2

$$h_{ij}^2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} p_{ij}^*(\xi, x) \phi^2(\eta) d\eta \quad (\text{B.57})$$

Substituindo as Expressões (B.37) e (III.4) em (B.57), tem-se:

$$h_{ij}^2 = \frac{\ell c_8}{2} \left[\frac{\ell - 2a}{2(\ell - a - b)} \right] \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{r} +$$

$$+ \frac{\ell^2 c_8}{4(\ell - a - b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta d\eta}{r} \quad (\text{B.58})$$

$$h_{ij}^2 = c_9^* \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{r} + c_{10} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta}{r} d\eta \quad (\text{B.59})$$

$$\text{onde} \quad c_9^* = \frac{c_8 \ell}{4} \left(\frac{\ell - 2b}{\ell - a - b} \right) \quad (\text{B.60})$$

c_{10} está apresentada em (B.44).

Analogamente ao item (B.2.1), obtem-se:

B.2.2.1 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (1)

$$h_{ij}^{12} = \left[\ln a - \ln (\ell - a) \right] \left[\frac{2 c_9^*}{\ell} - \frac{2 c_{10}}{\ell^2} (\ell - 2a) \right] - \frac{4 c_{10}}{\ell} \quad (\text{B.61})$$

B.2.2.2 - Ponto fonte ξ aplicado no nó (2)

$$h_{ij}^{22} = \left[\ln b + \ln (\ell - b) \right] \left[\frac{2 c_9^*}{\ell} + \frac{2 c_{10}}{\ell^2} (\ell - 2b) \right] - \frac{4 c_{10}}{\ell^2} (\ell - 2b) \quad (\text{B.62})$$

Operando algebricamente, simplificando alguns termos e agrupando as Expressões (B.49), (B.56), (B.61) e (B.62), obtém-se a expressão final:

$$h_{ij}^{kn} = c_8 \left[\ln A - \ln (\ell - A) \right] \delta_{kn} + \frac{\ell c_8}{\ell - a - b}, \quad A \neq 0 \quad (\text{B.63})$$

APÊNDICE C

TENSÕES NO CONTORNO PARA ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO

C.1 - Transformação das Forças de Superfície e Deslocamentos do Sistema de Referência Global para o Sistema de Referência Local ao Elemento Considerado

Seja a Figura (C.1) mostrada a seguir:

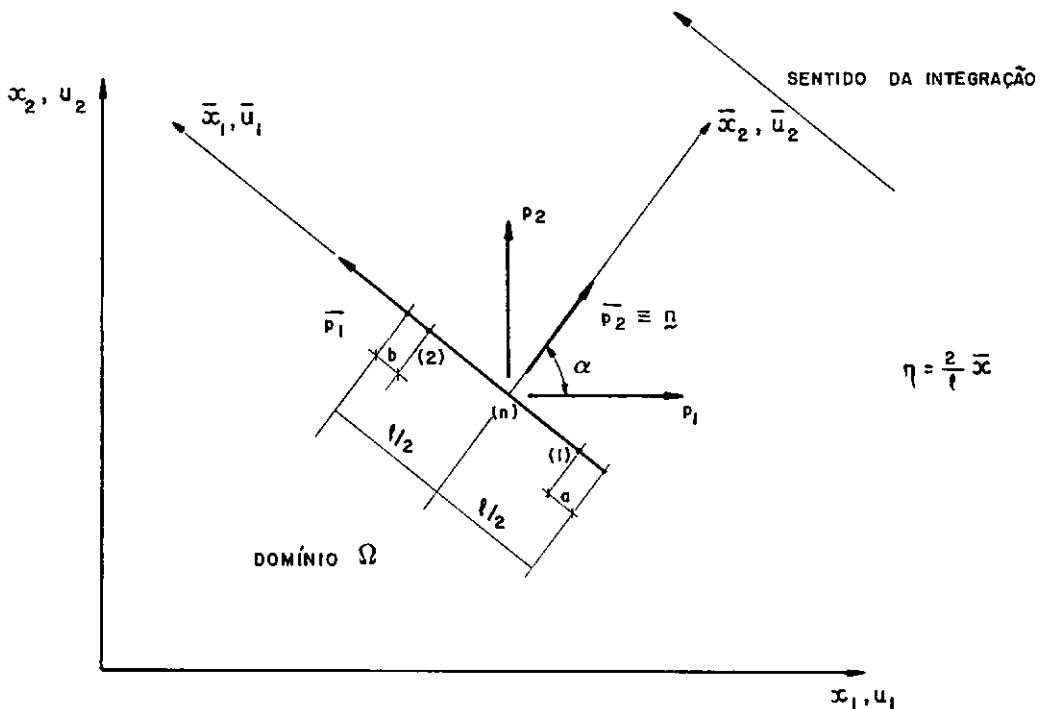


Fig.C.1 - Sistema de referência local ao elemento

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1^n \\ \bar{u}_2^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha \\ \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}^n = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{u}^n \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_1^n \\ \bar{p}_2^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha \\ \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{Bmatrix}$$

$$\bar{p}^n = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{p}^n$$

sendo, $\underset{\sim}{u}^n$, $\underset{\sim}{p}^n$: deslocamentos e forças de superfície no ponto nodal n em relação ao sistema de referência global,

$\bar{\underset{\sim}{u}}^n$, $\bar{\underset{\sim}{p}}^n$: deslocamentos e forças de superfície no ponto nodal n em relação ao sistema de referência local ao elemento,

$\underset{\sim}{R}$: matriz de transformação para tensor de 1ª ordem.

C.2 - Obtenção das Tensões no Sistema de Referência Local

$$\bar{p}_1^n = \bar{\sigma}_{12}^n \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{p}_2^n = \bar{\sigma}_{22}^n$$

A Lei de Hooke generalizada fornece (vide Equação (II.65)):

$$\bar{\sigma}_{11}^n = \frac{1}{1 - \nu} \left[\nu \bar{\sigma}_{22}^n + 2G\bar{\epsilon}_{11}^n - (1 + \nu) 2G\alpha T^n \right] \quad (C.3)$$

onde $\bar{\sigma}_{11}^n$, $\bar{\sigma}_{22}^n$ e $\bar{\sigma}_{12}^n$ são as tensões, T^n a temperatura e $\bar{\epsilon}_{11}^n$ a deformação específica. Todos obtidos no ponto nodal n em relação ao sistema de referência local, sendo a última descrita como:

$$\bar{\epsilon}_{11}^n = \frac{\partial \bar{u}_1^n}{\partial \bar{x}_1} \quad (C.4)$$

Tendo em vista que $\bar{u}_1^n = \phi^1 \bar{u}_1^1 + \phi^2 \bar{u}_1^2$ e operando a derivada, tem-se:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\bar{u}_1^2 - \bar{u}_1^1}{\ell - a - b} \quad (C.5)$$

sendo, \bar{u}_1^1 e \bar{u}_1^2 deslocamentos nos pontos nodais (1) e (2), respectivamente, em relação ao sistema de referência local.

Substituindo a Equação (C.5) em (C.3) e reescrevendo as igualdades (C.2), tem-se:

$$\bar{\sigma}_{11}^n = \frac{1}{1 - \nu} \left[\nu \bar{p}_2^n + \frac{2G(\bar{u}_1^2 - \bar{u}_1^1)}{\ell - a - b} - (1 + \nu) 2G\alpha T^n \right]$$

$$\bar{\sigma}_{12}^n = \bar{p}_1^n \quad (C.6)$$

$$\bar{\sigma}_{22}^n = \bar{p}_2^n$$

C.3 - Transformação das Tensões do Sistema de Referência Local para o Sistema de Referência Global

Para tensor de 2ª ordem tem-se:

$$\underline{\tau} = \underline{R}^T \underline{\bar{\tau}} \underline{R} \quad (C.7)$$

Sendo

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \text{sen}\alpha \end{bmatrix},$$

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad (C.8)$$

$$\underline{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{22} \end{bmatrix},$$

que substituídos na Expressão (C.7) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^n \\ \sigma_{12}^n \\ \sigma_{22}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}^2\alpha & -2\text{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ -\text{sen}\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha & \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha & 2\text{sen}\alpha\cos\alpha & \text{sen}^2\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^n \\ \bar{\sigma}_{12}^n \\ \bar{\sigma}_{22}^n \end{Bmatrix} \quad (C.9)$$

C.4 - Obtenção das Tensões Finais no Sistema de Referência Global em Função dos Deslocamentos e Forças de Superfície no Sistema de Referência Global

Introduzindo as expressões de deslocamentos e forças de superfície dadas em (C.1) nas equações apresentadas em (C.6), estas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}^n = & \frac{\nu}{1-\nu} \cos\alpha \, p_1^n + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{sen}\alpha \, p_2^n + \frac{2G}{(1-\nu)(\ell-a-b)} \operatorname{sen}\alpha \, u_1^1 - \\ & - \frac{2G}{(1-\nu)(\ell-a-b)} \cos\alpha \, u_1^1 - \frac{2G}{(1-\nu)(\ell-a-b)} \operatorname{sen}\alpha \, u_1^2 + \\ & + \frac{2G}{(1-\nu)(\ell-a-b)} \cos\alpha \, u_2^2 - \frac{2(1+\nu)G\alpha}{(1-\nu)} T^n\end{aligned}\quad (C.10)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^n = -\operatorname{sen}\alpha \, p_1^n + \cos\alpha \, p_2^n$$

$$\bar{\sigma}_{22}^n = \cos\alpha \, p_1^n + \operatorname{sen}\alpha \, p_2^n$$

Substituindo as Expressões (C.10) em (C.9) obtêm-se as tensões finais no sistema de referência global em termos dos deslocamentos e forças de superfície no sistema de referência global, escritas na forma matricial como:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^n \\ \sigma_{12}^n \\ \sigma_{22}^n \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} \cos\alpha \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \frac{\nu}{1-\nu} \sin^3\alpha - \sin\alpha \cos^2\alpha \\ -\frac{\nu}{(1-\nu)} \sin\alpha \cos^2\alpha + \sin^3\alpha & -\frac{\nu}{1-\nu} \sin^2\alpha \cos\alpha + \cos^3\alpha \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} \cos^3\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha & \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)} \sin\alpha \cos^2\alpha + \sin^3\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{Bmatrix} + \\
&+ \frac{2G}{(1-\nu)(\ell-a-b)} \begin{bmatrix} \sin^3\alpha & -\sin^2\alpha \cos\alpha & -\sin^3\alpha & \sin^2\alpha \cos\alpha \\ -\sin^2\alpha \cos\alpha & \sin\alpha \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \cos\alpha & -\sin\alpha \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha \sin\alpha & -\cos^3\alpha & -\cos^2\alpha \sin\alpha & \cos^3\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} + \\
&+ \frac{2(1+\nu)G\alpha}{(1-\nu)} \begin{Bmatrix} -\sin^2\alpha \\ \sin\alpha \cos\alpha \\ -\cos^2\alpha \end{Bmatrix} T^n
\end{aligned}$$

As expressões acima são válidas para estado plano de deformação. Para o estado plano de tensão deve-se trocar ν por $\bar{\nu}$ e α por $\bar{\alpha}$ apresentados em (II.23).

APÊNDICE D

TRANSFORMAÇÃO DA INTEGRAL DE DOMÍNIO PARA INTEGRAL DE CONTORNO DAS FORÇAS DE VOLUME GENERALIZADAS, UTILIZANDO O TENSOR DE GALERKIN

D.1 - Forças de Volume

Seja analisar a Expressão (II.76) para os dois casos a seguir.

D.1.1 - Peso próprio

$$B_i^V = \rho g_j \int_{\Omega} \left[G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \right] d\Omega \quad (D.1)$$

$$B_i^V = \rho g_j \int_{\Omega} \left[\left(G_{ij,k}^* \right)_{,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(G_{ik,j}^* \right)_{,k} \right] d\Omega \quad (D.2)$$

Aplicando o teorema da divergência em (D.2) tem-se:

$$B_i^V = \rho g_j \int_{\Gamma} \left[G_{ij,k}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,j}^* \right] n_k d\Gamma \quad (D.3)$$

Introduzindo a Expressão (II.70) do tensor de Galerkin em (D.3), operando as derivadas em relação às coordenadas do ponto campo x , tem-se:

$$B_i^V = \rho g_j \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\delta_{ij} r_k}{8\pi G} \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] - \frac{\delta_{ik} r_j}{16\pi G(1-\nu)} \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] \right\} n_k d\Gamma \quad (D.4)$$

Tendo em vista que $g_j \delta_{ij} = g_i$, $\delta_{ik} n_k = n_i$ e $r_k = r_{,k} r$, a Expressão (D.4) pode ser escrita na seguinte forma:

$$B_i^V = \rho \int_{\Gamma} \left\{ \frac{r}{8\pi G} \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] \left[g_i r_{,k} n_k - \frac{1}{2(1-\nu)} g_k r_{,k} n_i \right] \right\} d\Gamma \quad (D.5)$$

Para determinação das tensões nos pontos internos, deve-se calcular as derivadas com relação às coordenadas do ponto fonte ξ , obtendo as deformações específicas e introduzi-las na equação constitutiva. Apresenta-se a seguir estas expressões relativas à terceira integral da Expressão (II.73), para estado plano de deformação.

É importante observar que as derivadas são calculadas dentro da Integral no contorno, não apresentando nenhuma dificuldade.

Adotando d_i^V como sendo o integrando da Expressão (D.5), tem-se:

$$\frac{\partial d_i^V}{\partial x_j(\xi)} = \frac{\rho g_i n_k}{8\pi G} - \frac{\rho g_k n_i}{16\pi(1-\nu)G} \left[-2 \delta_{jk} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + 2 \frac{r_k r_j}{r^2} + \delta_{jk} \right] \quad (D.6)$$

$$\frac{\partial d_j^V}{\partial x_i(\xi)} = \frac{\rho g_j n_k}{8\pi G} - \frac{\rho g_k n_j}{16\pi(1-\nu)G} \left[-2 \delta_{ik} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + 2 \frac{r_k r_i}{r^2} + \delta_{ik} \right] \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = & \frac{\rho}{16\pi G} \left[-2 g_i n_j \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2 g_i n_k r_k r_j}{r^2} + g_i n_j + \right. \\ & + \frac{g_i n_i}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{g_k n_i r_k r_j}{(1-\nu)r^2} - \frac{g_j n_i}{2(1-\nu)} - 2 g_j n_i \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \\ & + \frac{2 g_j n_k r_k r_i}{r^2} + g_j n_i + \frac{g_i n_j}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \\ & \left. - \frac{g_k n_j r_k r_i}{(1-\nu)r^2} - \frac{g_i n_j}{2(1-\nu)} \right] \quad (D.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{kk} = & \frac{\rho}{16\pi G} \left[-4 g_k n_k \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{4 g_k n_m r_m r_k}{r^2} + 2 g_k n_k + \right. \\ & + \frac{2 g_k n_k}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{2 g_m n_k r_m r_k}{(1-\nu)r^2} - \frac{g_k n_k}{(1-\nu)} \left. \right] \quad (D.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = & \frac{\rho}{8\pi} \left\{ 2 n_k r_{,k} (g_i r_{,j} + g_j r_{,i}) + \right. \\
& + \frac{1}{(1-\nu)} \left\{ \nu \delta_{ij} \left[2 g_m n_k r_{,m} r_{,k} + g_k n_k \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right] - \right. \\
& - g_k r_{,k} (n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) + \\
& \left. \left. + \frac{(1-2\nu)}{2} \left[1 - 2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] (g_i n_j + g_j n_i) \right\} \right\} \quad (D.10)
\end{aligned}$$

D.1.2 - Força centrífuga

$$B_i^V = g_{jk} \int_{\Omega} \left[G_{ik,mm}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,mk}^* \right] x_j d\Omega \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned}
B_i^V = & g_{jk} \int_{\Omega} \left\{ \left[G_{ik,m}^* x_j \right]_{,m} - G_{ik,m}^* \delta_{jm} - \right. \\
& - \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\left[G_{im,k}^* x_j \right]_{,m} - G_{im,k}^* \delta_{jm} \right] \left. \right\} d\Omega \quad (D.12)
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência em (D.12) e lembrando que $G_{ik,m}^* \delta_{jm} = G_{ik,j}^*$ e $G_{im,k}^* \delta_{jm} = G_{ij,k}^*$, tem-se

$$B_i^V = g_{jk} \int_{\Gamma} \left[G_{ik,m}^* x_j n_m - G_{ik}^* n_j - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(G_{im,k}^* x_j n_m - G_{ij}^* n_k \right) \right] d\Gamma \quad (D.13)$$

Substituindo $g_{jk} G_{ij}^* n_k$ por $g_{jk} G_{ik}^* n_j$ na Expressão (D.13), tem-se

$$B_i^V = g_{jk} \int_{\Gamma} \left\{ x_j \left[G_{ik,m}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,k}^* \right] n_m - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} G_{ik}^* n_j \right\} d\Gamma \quad (D.14)$$

Introduzindo a Expressão (II.70) do tensor de Galerkin em (D.14), operando as derivadas em relação às coordenadas do ponto x , obtém-se:

$$B_i^V = \frac{1}{8\pi G} \int_{\Gamma} r \left\{ \left[2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right] \left[g_{si} x_s r_{,m} n_m - \frac{1}{2(1-\nu)} g_{jk} x_j r_{,k} n_i \right] - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} r \ln \left(\frac{1}{r} \right) g_{mi} n_m \right\} d\Gamma \quad (D.15)$$

Adotando agora d_i^v como sendo o integrando da Expressão (D.12), adotando as mesmas considerações do item (D.1.1), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_i^v}{\partial x_j(\xi)} = \frac{1}{8\pi G} \left[n_m x_s g_{si} - \frac{g_{ms} x_s n_i}{2(1-\nu)} \right] \left[-2 \delta_{jm} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2 r_m r_j}{r^2} + \delta_{jm} \right] - \frac{(1-2\nu) n_m g_{mi}}{16\pi(1-\nu)G} \left[-2 r_j \ln \left(\frac{1}{r} \right) + r_j \right] \end{aligned} \quad (D.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_j^v}{\partial x_i(\xi)} = \frac{1}{8\pi G} \left[n_m x_s g_{sj} - g_{ms} x_s n_j \right] \left[-2 \delta_{im} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2 r_m r_i}{r^2} + \delta_{im} \right] + \frac{(1-2\nu) n_m g_{mj}}{16\pi(1-\nu)G} \left[2 r_i \ln \left(\frac{1}{r} \right) - r_i \right] \end{aligned} \quad (D.17)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \frac{1}{16\pi G} \left[-2 n_j x_s g_{si} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + 2 n_m x_s g_{si} \frac{r_m r_j}{r^2} + \right. \\ \left. + n_j x_s g_{si} + g_{js} x_s n_i \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{g_{ms} x_s n_i r_m r_j}{(1-\nu)r^2} - \right. \\ \left. - \frac{g_{js} x_s n_i}{2(1-\nu)} + \frac{(1-2\nu) n_m g_{mi} r_j}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{(1-2\nu) n_m g_{mi} r_j}{2(1-\nu)} - \right. \\ \left. - 2 n_i x_s g_{sj} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + 2 n_m x_s g_{sj} \frac{r_m r_i}{r^2} + n_i x_s g_{sj} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_{is} x_s n_j}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{g_{ms} x_s n_j r_m r_i}{r^2 (1-\nu)} - \frac{g_{is} x_s n_j}{2(1-\nu)} + \\
& + \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} n_m g_{mj} r_i \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} n_m g_{mj} r_i \left. \right] \quad (D.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kk} = \frac{1}{8\pi G} & \left[-2 n_k x_s g_{sk} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + 2 n_m x_s g_{sk} \frac{r_m r_k}{r^2} + \right. \\
& + n_k x_s g_{sk} + \frac{g_{ks} x_s n_k}{(1-\nu)} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{g_{ms} x_s n_k r_m r_k}{r^2 (1-\nu)} - \\
& - \frac{g_{ks} x_s n_k}{2(1-\nu)} + \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} n_m g_{mk} r_k \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \\
& \left. - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} n_m g_{mk} r_k \right] \quad (D.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} = \frac{1}{8\pi} & \left\{ 2 n_m r_{,m} (x_s g_{si} r_{,j} + x_s g_{sj} r_{,i}) + \right. \\
& + \frac{1}{(1-\nu)} \left\{ \nu \delta_{ij} \left\{ 2 n_m r_{,m} r_{,s} g_{qs} x_q + \left[1-2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \left[n_k x_s g_{sk} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - n_m g_{mk} r_k \right] \right\} - \frac{(1-2\nu)}{2} \left[1-2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \left[g_{js} x_s n_i + g_{is} x_s n_j - \right. \\
& \left. \left. - (g_{mi} r_j n_m + g_{mj} r_i n_m) - g_{ms} x_s r_{,m} (n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) \right\} \right\} \quad (D.20)
\end{aligned}$$

D.2 - Carga Térmica

Seja analisar agora a Expressão (II.87), escrita na seguinte forma:

$$B_i^t = \frac{G\alpha (1 + \nu)}{(1 - \nu)} \int_{\Omega} G_{ik,kjj}^* T \, d\Omega \quad (D.21)$$

$$B_i^t = \frac{G\alpha (1 + \nu)}{(1 - \nu)} \left\{ \int_{\Omega} \left[G_{ik,kj}^* T \right]_{,j} \, d\Omega - \int_{\Omega} \left[G_{ik,k}^* T_{,j} \right]_{,j} \, d\Omega - \int_{\Omega} G_{ik,kj}^* T_{,jj} \, d\Omega \right\} \quad (D.22)$$

Levando em consideração o caso de fluxo estacionário (Equação (II.24)), a Equação (D.22) pode ser escrita na seguinte forma:

$$B_i^t = \frac{G\alpha (1 + \nu)}{(1 - \nu)} \int_{\Omega} \left[G_{ik,kj}^* T - G_{ik,k}^* T_{,j} \right]_{,j} \, d\Omega \quad (D.23)$$

Aplicando o teorema da divergência em (D.23), tem-se:

$$B_i^t = \frac{G\alpha (1 + \nu)}{(1 - \nu)} \int_{\Gamma} \left[G_{ik,kj}^* T n_j - G_{ik,k}^* T_{,j} n_j \right] \, d\Gamma \quad (D.24)$$

Introduzindo a Expressão (II.70) em (D.24), operando as derivadas em relação às coordenadas do ponto campo x , tem-se:

$$B_i^t = \frac{G\alpha (1 + \nu)}{(1 - \nu)} \left\{ \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{\delta_{ij}}{4\pi G} \ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{r_i r_j}{4\pi G r^2} - \frac{\delta_{ij}}{8\pi G} \right] T_{,j} n_j - \left[\frac{\delta_{ik} r_k}{8\pi G} \left(2 \ln \left(\frac{1}{r} \right) - 1 \right) \right] T_{,j} n_j \right\} d\Gamma \right\} \quad (D.25)$$

$$B_i^t = \int_{\Gamma} \bar{P}_i T d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_i T_{,k} n_k d\Gamma \quad (D.26)$$

$$\text{onde: } \bar{P}_i = \frac{(1 + \nu)\alpha}{4\pi (1 - \nu)} \left\{ \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] n_i - r_{,i} r_{,j} n_j \right\} \quad (D.27)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{(1 + \nu)\alpha}{4\pi (1 - \nu)} r_{,i} r \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (D.28)$$

Adotando as mesmas considerações do item (D.1.1), sendo as expressões agora relativas a última integral da Expressão (II.73), tem-se:

a) Obtenção de \bar{S}_{ij}

$$\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial x_j} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{n_i r_j}{r^2} + \frac{n_k (\delta_{ij} r_k + r_i \delta_{kj})}{r^2} - \frac{2 n_k r_i r_j r_k}{r^4} \right] \quad (D.29)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_j}{\partial x_i} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{n_j r_i}{r^2} + \frac{n_k (\delta_{ij} r_k + r_j \delta_{ki})}{r^2} - \frac{2 n_k r_j r_i r_k}{r^4} \right] \quad (D.30)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\alpha}{8\pi(1-\nu)} & \left\{ \frac{1}{r^2} \left[n_i r_j + n_j r_i + n_k \left(2 \delta_{ij} r_k + r_i \delta_{kj} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + r_j \delta_{ki} \right) \right] - \frac{4 n_k r_i r_j r_k}{r^4} \right\} \quad (D.31) \end{aligned}$$

$$\epsilon_{kk} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{n_k r_k}{r^2} + \frac{n_m (\delta_{kk} r_m + r_k \delta_{mk})}{r^2} - \frac{2 n_m r_k^2 r_m}{r^4} \right\} \quad (D.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \frac{\alpha G (1+\nu)}{2\pi(1-\nu)r} & \left\{ \frac{n_m r_m}{r} \left[\frac{\delta_{ij}}{(1-2\nu)} - \frac{2 r_i r_j}{r^2} \right] + \frac{n_i r_j}{r} + \right. \\ & \left. + \frac{n_j r_i}{r} \right\} \quad (D.33) \end{aligned}$$

b) Obtenção de \bar{v}_{ij}

$$\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial x_j} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[-\delta_{ij} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij}}{2} \right] \quad (D.34)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_j}{\partial x_i} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[-\delta_{ij} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij}}{2} \right] \quad (D.35)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left[-\delta_{ij} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij}}{2} \right] \quad (D.36)$$

$$\epsilon_{kk} = \frac{(1+\nu)\alpha}{2\pi(1-\nu)} \left[-\ln \left(\frac{1}{r} \right) + 1 \right] \quad (D.37)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{r_i r_j}{r^2} + \frac{\delta_{ij}}{(1-2\nu)} \left[\frac{1+2\nu}{2} - \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right\} \quad (D.38)$$

APÊNDICE E

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE GAUSS

A expressão utilizada para integração numérica unidimensional de Gauss é a seguinte:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) w_k ,$$

onde x_k é a coordenada do k -ésimo ponto de integração, w_k é o fator peso associado a cada ponto e n o número total de pontos de integração. O erro associado é $E_n = 0 (d^{2n}f/dx^{2n})$.

Estão listados na tabela a seguir valores para x_k e

w_k :

n	$\pm x_k$						w_k					
2	0.	577	350	269	189	626	1.	000	000	000	000	000
4	0.	861	136	311	594	053	0.	347	854	845	137	454
	0.	339	981	043	584	856	0.	652	145	154	862	546
6	0.	932	469	514	203	152	0.	171	324	492	379	170
	0.	661	209	386	466	265	0.	360	761	573	048	139
	0.	238	619	186	083	197	0.	467	913	934	572	691
8	0.	960	289	856	497	536	0.	101	228	536	290	376
	0.	796	666	477	413	627	0.	222	381	034	453	374
	0.	525	532	409	916	329	0.	313	706	645	877	887
	0.	183	434	642	495	650	0.	362	683	783	378	362
10	0.	973	906	528	517	172	0.	066	671	344	308	688
	0.	865	063	366	688	985	0.	149	451	349	150	581
	0.	679	409	568	299	024	0.	219	086	362	515	982
	0.	433	395	394	129	247	0.	269	266	719	309	996
	0.	148	874	338	981	631	0.	295	524	224	714	753
12	0.	981	560	634	246	719	0.	047	175	336	386	512
	0.	904	117	256	370	475	0.	106	939	325	995	318
	0.	769	902	674	194	305	0.	160	078	328	543	346
	0.	587	317	954	286	617	0.	203	167	426	723	066
	0.	367	831	498	998	180	0.	233	492	536	538	355
	0.	125	233	408	511	469	0.	249	147	045	813	403
16	0.	989	400	934	991	649	0.	027	152	459	411	754
	0.	944	575	023	073	232	0.	062	253	523	938	647
	0.	865	631	202	387	831	0.	095	158	511	682	492
	0.	755	404	408	355	003	0.	124	628	971	255	533
	0.	617	876	244	402	643	0.	149	595	988	816	576
	0.	458	016	777	657	227	0.	169	156	519	395	002
	0.	281	603	550	779	258	0.	182	603	415	044	923
	0.	095	012	509	837	637	0.	189	450	610	455	068
20	0.	993	128	599	185	094	0.	017	614	007	139	152
	0.	963	971	927	277	913	0.	040	601	429	800	387
	0.	912	234	428	251	325	0.	062	672	048	334	109
	0.	839	116	971	822	218	0.	083	276	741	576	705
	0.	746	331	906	460	150	0.	101	930	119	817	240
	0.	636	053	680	726	515	0.	118	194	531	961	518
	0.	510	867	001	950	827	0.	131	688	638	449	176
	0.	373	706	088	715	419	0.	142	096	109	318	382
	0.	227	785	851	141	645	0.	149	172	986	472	603
	0.	076	526	521	133	497	0.	152	753	387	130	726

APÊNDICE F

VERIFICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE REGULARIDADE PARA CARGA TÉRMICA

Seja analisar a Expressão (II.94) escrita para o contorno no infinito:

$$B_j^t = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} (\bar{P}_j T - \bar{Q}_j T_{, \ell} n_\ell) d\Gamma \quad (F.1)$$

Considerando que T tenha o comportamento da solução fundamental para potencial bidimensional, ou seja:

$$T = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (F.2)$$

$$T_{, \ell} n_\ell = \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{2\pi r^2}$$

Colocando as expressões relativas aos integrandos de uma forma reduzida e considerando o contorno como um círculo no infinito, tem-se:

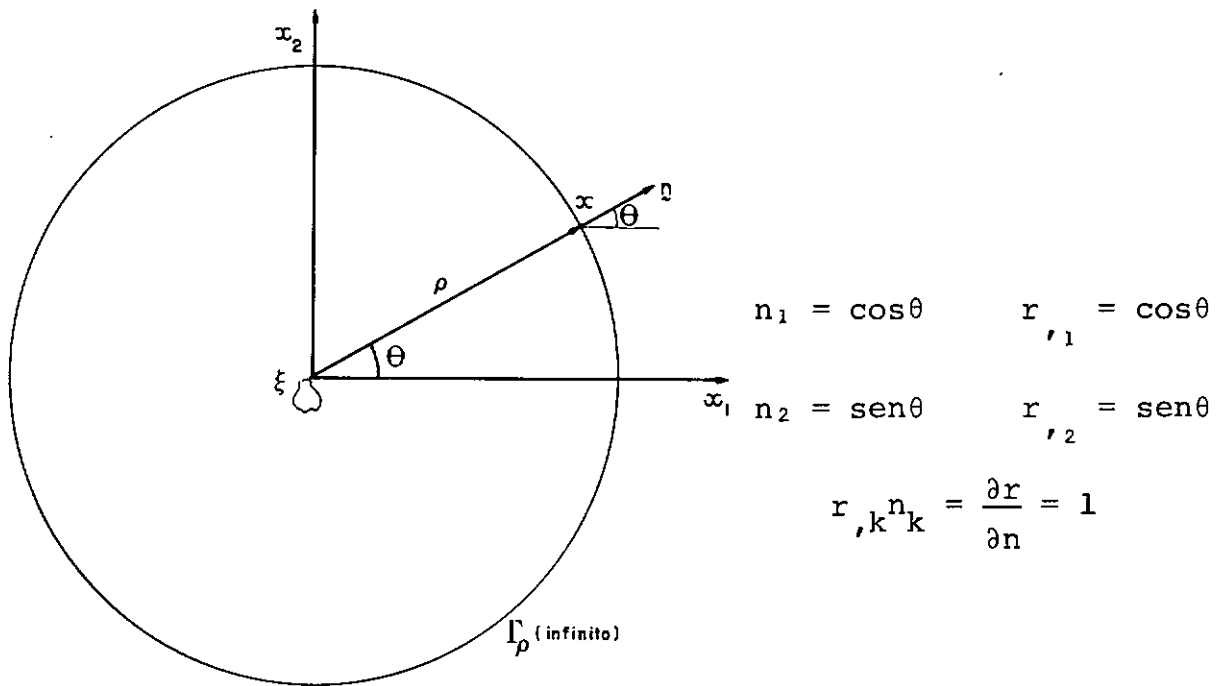


Fig.F.1 - Domínio infinito

$$\bar{P}_1 = (-a \ln \rho + b) \cos \theta$$

$$\bar{P}_2 = (-a \ln \rho + b) \sin \theta$$

$$\bar{Q}_1 = (-a \rho \ln \rho + c \rho) \cos \theta$$

$$\bar{Q}_2 = (-a \rho \ln \rho + c \rho) \sin \theta$$

(F.3)

$$T = -d \ln \rho$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{d}{\rho^2}$$

$$d\Gamma = \rho d\theta$$

onde

$$a = \frac{(1 + \nu)\alpha}{4\pi(1 - \nu)},$$

$$b = -\frac{3}{2}a, \quad c = -\frac{1}{2}a \quad (\text{F.4})$$

$$d = \frac{1}{2\pi}$$

Substituindo as Expressões (F.3) em (F.1) para $j = 1$ tem-se:

$$B_1^t = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[(-a \ln \rho + b)(-d \ln \rho) - \right. \\ \left. - (-a \rho \ln \rho + c \rho) \frac{d}{\rho^2} \right] \rho \cos \theta d\theta \quad (\text{F.5})$$

Como ρ é constante quando θ varia de 0 a 2π , a Equação (F.5) pode ser escrita como:

$$B_1^t = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[a d \rho (\ln \rho)^2 - b d \rho \ln \rho + a d \ln \rho - c d \right] \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \quad (\text{F.6})$$

Resolvendo a Expressão (F.6) obtem-se:

$$B_1^t = 0 \quad (\text{F.7})$$

Analogamente para $j = 2$ tem-se $B_2^t = 0$.

Portanto $B_j^t = 0$ para contorno no infinito, atendendo as condições de regularidade.